2020 年 1 月
第 46 卷第 1 期

西南民族大学学报(自然科学版)
Journal of Southwest Minzu University (Natural Science Edition)

Jan. 2020
Vol. 46 No. 1

doi:10.11920/xnmdzk.2020.01.009

Φ – 强增生型随机变分包含解的迭代逼近

张树义，聂　辉，张芯语

(渤海大学数理学院，辽宁 锦州　121013)

摘　要：在没有任何有界的条件下，在可分的 Banach 空间中研究一类 Φ – 强增生型随机变分包含解带混合误差的随机 Noor 迭代序列收敛性问题，在适当的条件下，建立了随机变分包含解随机 Noor 迭代序列的强收敛性定理，从而推广和改进了有关文献中的相应结果.

关键词：随机变分包含；可测函数；Φ – 强增生映象；随机 Noor 迭代序列

中图分类号：O177.91　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：2095-4271(2020)01-0053-12

Iterative approximations of solutions for random variational inclusions with Φ – stongly accretive type mappings

ZHANG Shu – yi, NIE Hui, ZHANG Xin – yu

(School of Mathematics and Physics, Bohai University, Jinzhou 121013, P. R. C.)

Abstract: The convergence problem of random Noor iterative sequences with mixed errors for random variational inclusion with Φ – stongly accretive type mappings is studied in separable reflexive Banach spaces without any boundedness. Under suitable conditions, the strong convergence theorem of random Noor iterative sequences of solutions for random variational inclusion is established, which extends and improves the corresponding results of some reference.

Key words: random variational inclusion; measurable function; Φ – stongly accretive mapping; random Noor iterative sequence

1　引言与预备知识

全文假设 (Ω,Σ) 是一可测空间，Σ 是 Ω 的 σ – 代数. X 是可分 Banach 空间，X^* 为 X 的对偶空间，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 X 与 X^* 之间的广义对偶对. 正规对偶映象 $J:X\to 2^{X^*}$ 定义为

$J(x)=\{f\in X^*:\langle x,f\rangle=\|x\|^2=\|f\|^2\}$. 设 $T,A:\Omega\times X\to X$, $N(\cdot,\cdot):X\times X\to X$, $\eta:X^*\times X^*\to X^*$ 和 $g:\Omega\times X\to X^*$ 是五个映象，$\varphi(\cdot,\cdot):X^*\times X\to R\cup\{+\infty\}$ 是使得对每一固定 $y\in X$, $\varphi(\cdot,y)$ 是具有 η – 次微分的真凸下半连续泛函. 对给定的 $f:\Omega\to X$，求 $u\in X$，使得对每一 $\omega\in\Omega$，有

$$\begin{cases} g(\omega,u)\in D(\partial_\eta\varphi), \\ \langle N(T(\omega,u),A(\omega,u))-f,\eta(v,g(\omega,u))\rangle\ge\varphi(g(\omega,u),u)-\varphi(v,u),\ \forall v\in X^*, \end{cases}\tag{1}$$

其中 $\partial_\eta\varphi$ 表示 φ 的 η – 次微分. (1)式称为 Banach 空间中随机变分包含问题. 易见，适当的选择映象 T,A,B,N,g,η,φ 和空间 X，问题(1)能够获得一些包括稳定型在内的已知变分不等式类，如文献[1 – 10].

收稿日期：2019-11-19
通信作者：张树义 (1960 –)，男，教授，研究方向：非线性泛函分析
基金项目：国家自然科学基金项目(11371070)

文献[1－10]考虑稳定型的变分包含问题，而这其中文献[6－10]在包括序列$\{x_n\}$有界性等一些条件下，研究了φ－强增生型变分包含和一类具广义 Lipschitz 变分包含解的迭代收敛性. 近年来，文献[11－19]在没有任何有界条件下，研究了几类非线性映象不动点迭代逼近问题. 本文的目的是在没有任何有界条件下，在可分的自反 Banach 空间中，研究 Φ－强增生型随机变分包含问题(1)式解的随机 Noor 迭代序列收敛问题，推广和改进了文献[6－9]和一些已知的结果. 下面回忆一些预备知识.

定义 1　设 C 是 X 的非空子集.

(i) 函数 $f:\Omega\to C$ 被称为是可测的，如果对任意 Borel 子集 B 有 $f^{-1}(B\cap C)\in\Sigma$.

(ii) $T:\Omega\times C\to C$ 被称为是随机算子，如果对每一 $x\in C$，$T(\cdot,x):\Omega\to C$ 是可测的.

(iii) 可测函数 $f:\Omega\to C$ 被称为是随机算子 $T:\Omega\times C\to C$ 的随机不动点，如果对 $\forall\omega\in\Omega$，$T(\omega,f(\omega))=f(\omega)$.

(iv) 随机算子 $T:\Omega\times C\to C$ 被称为是连续的，如果对任意给定的 $\omega\in\Omega$，$T(\omega,\cdot):C\to C$ 是连续的.

定义 2　设 $T:\Omega\times X\to X$ 是一随机算子，T 称为增生的，如果对任 $\forall x,y\in X$，存在 $j(x-y)\in J(x-y)$，使得对每一 $\omega\in\Omega$，有 $\langle T(\omega,x)-T(\omega,y),j(x-y)\rangle\geq 0$.

熟知 T 是随机增生的当且仅当 $\forall x,y\in X$，$\forall r>0$ 以及对每一 $\omega\in\Omega$，有

$$\|x-y\|\leq\|x-y+r(T(\omega,x)-T(\omega,y))\|.\tag{2}$$

定义 3　设 $T:\Omega\times X\to X$ 是一映象，$\Phi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是严格增加函数且 $\Phi(0)=0$，称随机映象 T 为 Φ－强增生的，如果对任给的 $x,y\in X$，存在 $j(x-y)\in J(x-y)$，使得对每一 $\omega\in\Omega$，有

$\langle T(\omega,x)-T(\omega,y),j(x-y)\rangle\geq\Phi(\|x-y\|)\|x-y\|$.

注 1　在定义 3 中取 $\Phi(t)=kt(0<k<1)$，便得 k－随机强增生映象. 因此 k－随机强增生映象一定是 Φ－随机强增生映象. 稳定型增生映象、k－随机强增生映象以及 Φ－随机强增生映象一定是随机增生映象.

定义 4[20]　设 X 是一实 Banach 空间，$\varphi:X^*\to R\cup\{+\infty\}$ 为一真凸泛函，$\eta:X\times X\to X$ 是一个映象，若对 $x_0\in X$，存在 $f\in X^*$，使得 $\varphi(y)-\varphi(x_0)\geq\langle f,\eta(y,x_0)\rangle$，$\forall y\in X$，则称 φ 在 x_0 处是 η－次可微的，并称 f 为 φ 在 x_0 处的 η－次梯度. 在 x_0 处的一切 η－次梯度的集合用 $\partial_\eta\varphi(x_0)$ 表示.

定义 5　设 $T,A:\Omega\times X\to X$，$N(\cdot,\cdot):X\times X\to X$，

(i) 映象 $x\to N(x,y)$ 关于随机算子 T 是 μ－Lipschitz 的，如果存在常数 $\mu\geq 1$，使得 $\forall x,y,z\in C$ 和对每一 $\omega\in\Omega$，有 $\|N(T(\omega,x),z)-N(T(\omega,y),z)\|\leq\mu\|x-y\|$.

(ii) 映象 $y\to N(x,y)$ 关于 A 是 ξ－Lipschitz 的，如果存在常数 $\xi\geq 1$，使得 $\forall x,y,z\in C$ 和对每一 $\omega\in\Omega$，有 $\|N(z,A(\omega,x))-N(z,A(\omega,y))\|\leq\xi\|x-y\|$.

定义 6　设 $T:\Omega\times X\to X$，称随机算子 T 是 γ－广义 Lipschitz 的，如果存在常数 $\gamma\geq 1$，使得 $\forall x,y\in C$，对每一 $\omega\in\Omega$，有 $\|T(\omega,x)-T(\omega,y)\|\leq\gamma(1+\|x-y\|)$.

注 2　值域有界一定是广义 Lipschitz 的，而反之未必成立，反例可见文献[21].

引理 1[22]　设 X 是可分距离空间，Y 是距离空间. $T:\Omega\times X\to Y$ 在 $\omega\in\Omega$ 是可测的并且在 $x\in X$ 是连续的. 如果 $g:\Omega\to X$ 是可测函数，则 $f(\cdot,g(\cdot)):\Omega\to Y$ 是可测的.

引理 2[23]　设 X 是实 Banach 空间，$T:X\to X$ 是连续的 Φ－强增生算子，则 $\forall f\in X$，方程 $Tx=f$ 在 X 中有唯一解.

对于下列稳定型的变分包含问题

$$\begin{cases} g(u)\in D(\partial_\eta\varphi), \\ \langle N(T(u),A(u))-f,\eta(v,g(u))\rangle\geq\varphi(g(u),u)-\varphi(v,u),\ \forall v\in X^*. \end{cases}\tag{*}$$

文献[1－5]得到如下引理

引理 3[1-5] 设 X 是自反 Banach 空间,则下面的结论等价

(i) $x^{*} \in X$ 是变分包含问题($*$)的解;

(ii) $x^{*} \in X$ 是映象 $S:X \to 2^{X}$ 的不动点,其中

$$S(x) = f - (N(T(x),A(x)) + \partial_{\eta}\varphi(g(x),x)) + x .$$

(iii) $x^{*} \in X$ 是方程 $f \in N(T(x),A(x)) + \partial_{\eta}\varphi(g(x),x)$ 的解.

2 主要结果

定理 1 设 X 是可分的自反 Banach 空间, $T,A:\Omega \times X \to X, N(\cdot,\cdot):X \times X \to X$, $\eta:X^{*} \times X^{*} \to X^{*}$ 和 $g:\Omega \times X \to X^{*}$ 是五个映象, $\varphi(\cdot,\cdot):X^{*} \times X \to R \cup \{+\infty\}$ 是具有 η － 次微分 $\partial_{\eta}\varphi$ 的双函数且对第一变元是真凸和下半连续的. 设 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\delta_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的实数列,对每一 $\omega \in \Omega$, $\{u_n(\omega)\}$, $\{v_n(\omega)\}$, $\{w_n(\omega)\}$, $\{u_n'(\omega)\}$, $\{u_n''(\omega)\}$, $\{v_n'(\omega)\}$ 和 $\{v''_n(\omega)\}$ 都是 X 中的可测序列,且满足以下条件

(i) 对 $\forall \omega \in \Omega$, $N(T(\omega,\cdot),A(\omega,\cdot)) + \partial_{\eta}\varphi(g(\omega,\cdot),\cdot):X \to X$ 是连续的随机 Φ － 强增生的;

(ii) 对 $\forall \omega \in \Omega$, 映象 $x \to N(x,y)$ 关于 T 是 μ － Lipschitz 连续的,映象 $y \to N(x,y)$ 关于 A 是 ξ － Lipschitz 的;

(iii) $\alpha_n \to 0, \beta_n \to 0, \delta_n \to 0 (n \to \infty)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$; (v) $u_n(\omega) = u_n'(\omega) + u''_n(\omega)$, $\| u_n'(\omega) \| = o(\alpha_n)$, $v_n(\omega) = v_n'(\omega) + v''_n(\omega)$, $\| v_n'(\omega) \| \to 0 (n \to \infty)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \| u''_n(\omega) \| < \infty$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n \| v''_n(\omega) \| < \infty$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n \beta_n \| w_n(\omega) \| < \infty$. 对任给的 $f:\Omega \to X$, 定义映象 $S:\Omega \times X \to X$ 如下

$S(\omega,x) = f(\omega) - (N(T(\omega,x),A(\omega,x)) + \partial_{\eta}\varphi(g(\omega,x),x)) + x, \forall x \in X$.

对任给的 $x_0(\omega) \in X$,具有混合误差项的随机 Noor 迭代序列 $\{x_n(\omega)\} \subset X$ 定义如下

$$\begin{cases} x_{n+1}(\omega) = (1 - \alpha_n) x_n(\omega) + \alpha_n S(\omega, y_n(\omega)) + u_n(\omega), \\ y_n(\omega) = (1 - \beta_n) x_n(\omega) + \beta_n S(\omega, z_n(\omega)) + v_n(\omega), \\ z_n(\omega) = (1 - \delta_n) x_n(\omega) + \delta_n S(\omega, x_n(\omega)) + w_n(\omega), n \geq 0, \end{cases} \tag{3}$$

若对 $\forall \omega \in \Omega$, $\| \partial_{\eta}\varphi(g(\omega,x_{n+1}(\omega)),x_{n+1}(\omega)) - \partial_{\eta}\varphi(g(\omega,y_n(\omega)),y_n(\omega)) \| \to 0 (n \to \infty)$ 且序列 $\{\partial_{\eta}\varphi(g(\omega,x),x)\}$ 是 γ － 广义 Lipschitz 的, 则随机变分包含问题(1)存在唯一随机解 $x^{*}(\omega) \in X$,且 $\{x_n(\omega)\}$ 强收敛于(1)的唯一随机解 $x^{*}(\omega)$.

证明 $T:\Omega \times X \to X$ 是连续的随机算子, $x_0:\Omega \to X$ 是可测函数. 由引理 1 易知 $\{x_n(\omega)\}$ 和 $\{y_n(\omega)\}$ 是 Ω 到 X 的可测函数. 对 $\forall \omega \in \Omega$,因映象 $N(T(\omega,\cdot),A(\omega,\cdot)) + \partial_{\eta}\varphi(g(\omega,\cdot),\cdot): X \to X$ 是连续 Φ － 强增生的,由引理 2 知,对每一 $\omega \in \Omega, f:\Omega \to X$, 方程

$N(T(\omega,x),A(\omega,x)) + \partial_{\eta}\varphi(g(\omega,x),x) = f(\omega)$ 在 X 中有唯一解 $x^{*}(\omega)$. 由于 X 是自反的,故由引理 3 知,对每一 $\omega \in \Omega$, $x^{*}(\omega)$ 是变分包含问题(1)的唯一解,因而也是映象 $S(\omega,\cdot)$ 在 X 中的唯一不动点,即 $S(\omega,x^{*}(\omega)) = x^{*}(\omega)$. 因 $N(T(\omega,\cdot),A(\omega,\cdot)) + \partial_{\eta}\varphi(g(\omega,\cdot),\cdot)$ 是 Φ － 强增生的,于是对 $\forall x,y \in X$,存在 $j(x-y) \in J(x-y)$,使得对 $\forall \omega \in \Omega$, 有

$$\langle S(\omega,x) - S(\omega,y), j(x-y) \rangle = \langle f(\omega) - (N(T(\omega,x),A(\omega,x)) + \partial_{\eta}\varphi(g(\omega,x),x)) + x -$$
$$(f(\omega) - (N(T(\omega,y),A(\omega,y)) + \partial_{\eta}\varphi(g(\omega,y),y)) + y), j(x-y) \rangle =$$

$-\langle (N(T(\omega,x),A(\omega,x))+\partial_\eta\varphi(g(x),x)-x)-(N(T(\omega,y),A(\omega,y))+\partial_\eta\varphi(g(\omega,y),y)-y),j(x-y)\rangle \le \|x-y\|^2 - \Phi(\|x-y\|)\|x-y\| \le (1-\Upsilon(x,y))\|x-y\|^2$, 其中 $\Upsilon(x,y)=\dfrac{\Phi(\|x-y\|)}{1+\|x-y\|+\Phi(\|x-y\|)}\in[0,1)$, 于是 $\langle (I-S(\omega,\cdot)-\Upsilon(x,y)I)x-(I-S(\omega,\cdot)-\Upsilon(x,y)I)y, j(x-y)\rangle \ge 0$, 因此对 $\forall\omega\in\Omega$, $I-S(\omega,\cdot)-\Upsilon(x,y)I$ 是随机增生算子, 于是由(2)式对每一 $\omega\in\Omega$, $r>0$ 有

$$\|x-y\|\le\|x-y-r[(I-S(\omega,\cdot)-\Upsilon(x,y)I)x-(I-S(\omega,\cdot)-\Upsilon(x,y)I)y]\|. \tag{4}$$

由(3)有

$(1-\alpha_n)x_n(\omega)=(1-(1-\Upsilon(x_{n+1}(\omega),x^*(\omega)))\alpha_n)x_{n+1}(\omega)+$

$\alpha_n(I-S(\omega,\cdot)-\Upsilon(x_{n+1}(\omega),x^*(\omega))I)x_{n+1}(\omega)+\alpha_nS(\omega,x_{n+1}(\omega))-\alpha_nS(\omega,y_n(\omega))-u_n(\omega),$

$(1-\alpha_n)x^*(\omega)=(1-(1-\Upsilon(x_{n+1}(\omega),x^*(\omega)))\alpha_n)x^*(\omega)+\alpha_n(I-S(\omega,\cdot)-\Upsilon(x_{n+1}(\omega),x^*(\omega))I)x^*(\omega)$

由此并使用(4)式对每一 $\omega\in\Omega$, $\forall n\ge 0$, 有

$(1-\alpha_n)\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|\ge$

$(1-(1-\Upsilon(x_{n+1}(\omega),x^*(\omega)))\alpha_n)\|x_{n+1}(\omega)-x^*(\omega)+\dfrac{\alpha_n}{(1-(1-\Upsilon(x_{n+1}(\omega),x^*(\omega)))\alpha_n)}$

$[(I-S(\omega,\cdot)-\Upsilon(x_{n+1}(\omega),x^*(\omega))I)x_{n+1}(\omega)-(I-S(\omega,\cdot)-\Upsilon(x_{n+1}(\omega),x^*(\omega))I)x^*(\omega)]\|\ge$

$(1-(1-\Upsilon(x_{n+1}(\omega),x^*(\omega)))\alpha_n)\|x_{n+1}(\omega)-x^*(\omega)\|-\alpha_n\|S(\omega,x_{n+1}(\omega))-S(\omega,y_n(\omega))\|-\|u_n(\omega)\|$, 从而

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}(\omega)-x^*(\omega)\|\le&\left(1-\frac{\Upsilon(x_{n+1}(\omega),x^*(\omega))}{1-(1-\Upsilon(x_{n+1}(\omega),x^*(\omega)))\alpha_n}\right)\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|+\\&\frac{\alpha_n\|S(\omega,x_{n+1})-S(\omega,y_n)\|}{1-(1-\Upsilon(x_{n+1}(\omega),x^*(\omega)))\alpha_n}+\frac{\|u_n(\omega)\|}{1-(1-\Upsilon(x_{n+1}(\omega),x^*(\omega)))\alpha_n}.\end{aligned}\tag{5}$$

因 $\{\partial_\eta\varphi(g(\omega,x),x)\}$ 是 γ－广义 Lipschitz 的, 于是存在常数 $\gamma>0$, 对每一 $\omega\in\Omega$, $\forall n\ge0$, 有

$\|\partial_\eta\varphi(g(\omega,x_n(\omega)),x_n(\omega))-\partial_\eta\varphi(g(\omega,x^*(\omega)),x^*(\omega))\|\le\gamma(1+\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|)$,

$\|\partial_\eta\varphi(g(\omega,y_n(\omega)),y_n(\omega))-\partial_\eta\varphi(g(\omega,x^*(\omega)),x^*(\omega))\|\le\gamma(1+\|y_n(\omega)-x^*(\omega)\|)$.

由 S 定义对每一 $\omega\in\Omega$, $\forall n\ge0$, 有

$$\begin{aligned}&\|S(\omega,x_{n+1}(\omega))-S(\omega,y_n(\omega))\|=\|N(T(\omega,x_{n+1}(\omega)),A(\omega,x_{n+1}(\omega))))-N(T(\omega,y_n(\omega)),A(\omega,y_n(\omega)))+\\&\partial_\eta\varphi(g(\omega,x_{n+1}(\omega)),x_{n+1}(\omega))-\partial_\eta\varphi(g(\omega,y_n(\omega)),y_n(\omega))-y_n(\omega)+x_{n+1}(\omega)\|\le\\&\|N(T(\omega,x_{n+1}(\omega)),A(\omega,x_{n+1}(\omega)))-N(T(\omega,y_n(\omega)),A(\omega,y_n(\omega)))\|+\\&\|\partial_\eta\varphi(g(\omega,x_{n+1}(\omega)),x_{n+1}(\omega))-\partial_\eta\varphi(g(\omega,y_n(\omega)),y_n(\omega))\|+\|y_n(\omega)-x_{n+1}(\omega)\|\le\\&\|N(T(\omega,x_{n+1}(\omega)),A(\omega,x_{n+1}(\omega)))-N(T(\omega,y_n(\omega)),A(\omega,x_{n+1}(\omega)))\|+\\&\|N(T(\omega,y_n(\omega)),A(\omega,x_{n+1}(\omega)))-N(T(\omega,y_n(\omega)),A(\omega,y_n(\omega)))\|+\\&\|\partial_\eta\varphi(g(\omega,x_{n+1}(\omega)),x_{n+1}(\omega))-\partial_\eta\varphi(g(\omega,y_n(\omega)),y_n(\omega))\|+\|y_n(\omega)-x_{n+1}(\omega)\|\le\\&(1+\mu+\xi+\gamma)\|x_{n+1}(\omega)-y_n(\omega)\|+\|\partial_\eta\varphi(g(\omega,x_{n+1}(\omega)),x_{n+1}(\omega))-\partial_\eta\varphi(g(\omega,y_n(\omega)),y_n(\omega))\|.\end{aligned}\tag{6}$$

由(3)对每一 $\omega\in\Omega$, 有如下估计

$$\begin{aligned}&\|z_n(\omega)-x^*(\omega)\|\le(1-\delta_n)\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|+\delta_n\|S(\omega,x_n(\omega))-S(\omega,x^*(\omega))\|+\|w_n(\omega)\|\le\\&(1-\delta_n)\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|+\delta_n\|N(T(\omega,x_n(\omega)),A(\omega,x_n(\omega)))-N(T(\omega,x^*(\omega)),A(\omega,x^*(\omega)))\|+\\&\delta_n\|\partial_\eta\varphi(g(\omega,x_n(\omega)),x_n(\omega))-\partial_\eta\varphi(g(\omega,x^*(\omega)),x^*(\omega))\|+\delta_n\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|+\|w_n(\omega)\|\le\\&(1+\mu+\xi+\gamma)\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|+\delta_n\gamma+\|w_n(\omega)\|,\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned}&\|y_n(\omega)-x^*(\omega)\|\le(1-\beta_n)\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|+\beta_n\|S(\omega,z_n(\omega))-S(\omega,x^*(\omega))\|+\|v_n(\omega)\|\le\\&(1-\beta_n)\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|+\beta_n\|N(T(\omega,z_n(\omega)),A(\omega,z_n(\omega)))-N(T(\omega,x^*(\omega)),A(\omega,x^*(\omega)))\|+\\&\beta_n\|\partial_\eta\varphi(g(\omega,z_n(\omega)),z_n(\omega))-\partial_\eta\varphi(g(\omega,x^*(\omega)),x^*(\omega))\|+\beta_n\|z_n(\omega)-x^*(\omega)\|+\|v_n(\omega)\|\le\\&(1+\mu+\xi+\gamma)\beta_n\|z_n(\omega)-x^*(\omega)\|+(1-\beta_n)\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|+\beta_n\gamma+\|v_n(\omega)\|\le\\&(1+\mu+\xi+\gamma)\beta_n[(1+\mu+\xi+\gamma)\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|+\delta_n\gamma+\|w_n(\omega)\|]+\\&(1-\beta_n)\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|+\beta_n\gamma+\|v_n(\omega)\|\le\\&(1+(1+\mu+\xi+\gamma)^2\beta_n)\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|+(1+\mu+\xi+\gamma)\beta_n\delta_n\gamma+\\&(1+\mu+\xi+\gamma)\beta_n\|w_n(\omega)\|+\beta_n\gamma+\|v_n(\omega)\|.\end{aligned}\tag{8}$$

由(7)和(8)有

$$\begin{aligned}&\|y_n(\omega)-x_n(\omega)\|=\|\beta_n(S(\omega,z_n(\omega))-x_n(\omega))+v_n(\omega)\|\le\\&\beta_n\|S(\omega,z_n(\omega))-x^*(\omega)\|+\beta_n\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|+\|v_n(\omega)\|\le\\&\beta_n\|N(T(\omega,z_n(\omega)),A(\omega,z_n(\omega)))-z_n(\omega)-N(T(\omega,x^*(\omega)),A(\omega,x^*(\omega)))+x^*(\omega)\|+\\&\beta_n\|\partial_\eta\varphi(g(\omega,z_n(\omega)),z_n(\omega))-\partial_\eta\varphi(g(\omega,x^*(\omega)),x^*(\omega))\|+\\&\beta_n\|z_n(\omega)-x^*(\omega)\|+\beta_n\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|+\|v_n(\omega)\|\le\\&\beta_n\|N(T(\omega,z_n(\omega)),A(\omega,z_n(\omega)))-N(T(\omega,x^*(\omega)),A(\omega,z_n(\omega)))\|+\\&\beta_n\|N(T(\omega,x^*(\omega)),A(\omega,z_n(\omega)))-N(T(\omega,x^*(\omega)),A(\omega,x^*(\omega)))\|+\\&\beta_n\gamma(1+\|z_n(\omega)-x^*(\omega)\|)+\beta_n\|z_n(\omega)-x^*(\omega)\|+\beta_n\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|+\|v_n(\omega)\|\le\\&\beta_n(\mu+\xi+\gamma+1)\|z_n(\omega)-x^*(\omega)\|+\beta_n\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|+\beta_n\gamma+\|v_n(\omega)\|\le,\\&\beta_n(\mu+\xi+\gamma+1)(1+\mu+\xi+\gamma)\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|+\delta_n\beta_n\gamma(\mu+\xi+\gamma+1)+\\&\beta_n(\mu+\xi+\gamma+1)\|w_n(\omega)\|+\beta_n\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|+\beta_n\gamma+\|v_n(\omega)\|\le\\&\beta_n(1+(\mu+\xi+\gamma+1)^2)\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|+\\&\delta_n\beta_n\gamma(\mu+\xi+\gamma+1)+\beta_n(\mu+\xi+\gamma+1)\|w_n(\omega)\|+\beta_n\gamma+\|v_n(\omega)\|\end{aligned}\tag{9}$$

和 $\|S(\omega,y_n(\omega))-x_n(\omega)\|\le\|S(\omega,y_n(\omega))-S(\omega,x^*(\omega))\|+\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|\le$

$$\begin{aligned}&\|N(T(\omega,y_n(\omega)),A(\omega,y_n(\omega)))-N(T(\omega,x^*(\omega)),A(\omega,y_n(\omega)))\|+\\&\|N(T(\omega,x^*(\omega)),A(\omega,y_n(\omega)))-N(T(\omega,x^*(\omega)),A(\omega,x^*(\omega)))\|+\\&\|\partial_\eta(g(\omega,y_n(\omega)),y_n(\omega))-\partial_\eta\varphi(g(\omega,x^*(\omega)),x^*(\omega))\|+\\&\|y_n(\omega)-x^*(\omega)\|+\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|\le\\&(1+\mu+\xi+\gamma)\|y_n(\omega)-x^*(\omega)\|+\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|+\gamma\le\\&(1+\mu+\xi+\gamma)(1+(1+\mu+\xi+\gamma)^2\beta_n)\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|+(1+\mu+\xi+\gamma)^2\beta_n\delta_n\gamma+\\&(1+\mu+\xi+\gamma)^2\beta_n\|w_n(\omega)\|+(1+\mu+\xi+\gamma)\beta_n\gamma+(1+\mu+\xi+\gamma)\|v_n(\omega)\|+\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|+\gamma\le\\&(2+\mu+\xi+\gamma+(1+\mu+\xi+\gamma)^3\beta_n)\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|+\\&(1+\mu+\xi+\gamma)^2\beta_n\delta_n\gamma+(1+\mu+\xi+\gamma)\beta_n\gamma+\end{aligned}$$

$$(1+\mu+\xi+\gamma)\|v_n(\omega)\|+(1+\mu+\xi+\gamma)^2\beta_n\|w_n(\omega)\|+\gamma. \tag{10}$$

由(9)，(10)，对每一 $\omega\in\Omega$，得

$$\|x_{n+1}(\omega)-y_n(\omega)\|\le\alpha_n\|S(\omega,y_n(\omega))-x_n(\omega)\|+\|x_n(\omega)-y_n(\omega)\|+\|u_n(\omega)\|\le$$
$$\alpha_n[2+\mu+\xi+\gamma+(1+\mu+\xi+\gamma)^3\beta_n]\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|+$$
$$(1+\mu+\xi+\gamma)^2\alpha_n\beta_n\delta_n\gamma+(1+\mu+\xi+\gamma)\alpha_n\beta_n\gamma+(1+\mu+\xi+\gamma)\alpha_n\|v_n(\omega)\|+$$
$$(1+\mu+\xi+\gamma)^2\alpha_n\beta_n\|w_n(\omega)\|+\alpha_n\gamma+\beta_n(1+(1+\mu+\xi+\gamma)^2)\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|+$$
$$\delta_n\beta_n\gamma(\mu+\xi+\gamma+1)+\beta_n(\mu+\xi+\gamma+1)\|w_n(\omega)\|+\beta_n\gamma+\|v_n(\omega)\|+\|u_n(\omega)\|\le$$
$$\alpha_n[2+\mu+\xi+\gamma+(1+\mu+\xi+\gamma)^3\beta_n]\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|+$$
$$(1+\mu+\xi+\gamma)^2\alpha_n\beta_n\delta_n\gamma+(1+\mu+\xi+\gamma)\alpha_n\beta_n\gamma+(1+\mu+\xi+\gamma)\alpha_n\|v_n(\omega)\|+$$
$$(1+\mu+\xi+\gamma)^2\alpha_n\beta_n\|w_n(\omega)\|+\alpha_n\gamma+\beta_n(1+(1+\mu+\xi+\gamma)^2)\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|+$$
$$\delta_n\beta_n\gamma(\mu+\xi+\gamma+1)+\beta_n(\mu+\xi+\gamma+1)\|w_n(\omega)\|+\beta_n\gamma+\|v_n(\omega)\|+\|u_n(\omega)\|. \tag{11}$$

把(11)代入(6)，再把(6)代入(5)，对每一 $\omega\in\Omega$，对 $\forall n\ge 0$ 得

$$\|x_{n+1}(\omega)-x^*(\omega)\|\le\left(1-\frac{\Upsilon(x_{n+1}(\omega),x^*(\omega))\alpha_n}{1-(1-\Upsilon(x_{n+1}(\omega),x^*(\omega)))\alpha_n}\right)\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|+$$
$$+$$
$$\frac{\alpha_n(1+\mu+\xi+\gamma)[\alpha_n(2+\mu+\xi+\gamma+(1+\mu+\xi+\gamma)^3\beta_n)]}{1-(1-\Upsilon(x_{n+1}(\omega),x^*(\omega)))\alpha_n}\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|$$
$$\frac{\alpha_n\beta_n(1+\mu+\xi+\gamma)(1+(1+\mu+\xi+\gamma)^2)}{1-(1-\Upsilon(x_{n+1}(\omega),x^*(\omega)))\alpha_n}\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|+$$
$$\frac{(1+\mu+\xi+\gamma)^2\alpha_n[(1+\mu+\xi+\gamma)\alpha_n\beta_n\delta_n\gamma+\alpha_n\beta_n\gamma+\alpha_n\|v_n(\omega)\|+(1+\mu+\xi+\gamma)\alpha_n\beta_n\|w_n(\omega)\|+\|u_n(\omega)\|]}{1-(1-\Upsilon(x_{n+1}(\omega),x^*(\omega)))\alpha_n}+$$
$$\frac{\alpha_n\|\partial_\eta\varphi(g(\omega,x_{n+1}(\omega)),x_{n+1}(\omega))-\partial_\eta\varphi(g(\omega,y_n(\omega)),y_n(\omega))\|}{1-(1-\Upsilon(x_{n+1}(\omega),x^*(\omega)))\alpha_n}.$$
$$+\frac{(\mu+\xi+\gamma+1)^2(\alpha_n\beta_n\delta_n\gamma+\alpha_n\beta_n\|w_n(\omega)\|)+(\mu+\xi+\gamma+1)\alpha_n((\alpha_n+\beta_n)\gamma+\|v_n(\omega)\|+\|u_n(\omega)\|)+\|u_n(\omega)\|}{1-(1-\Upsilon(x_{n+1}(\omega),x^*(\omega)))\alpha_n}. \tag{12}$$

因对每一 $\omega\in\Omega$，$1-(1-\Upsilon(x_{n+1}(\omega),x^*(\omega)))\alpha_n\to 1(n\to\infty)$，故 $\exists n_1$，$\forall n\ge n_1$，有 $1-(1-\Upsilon(x_{n+1}(\omega),x^*(\omega)))\alpha_n>\dfrac{1}{2}$，由(12)，对每一 $\omega\in\Omega$，有

$$\|x_{n+1}(\omega)-x^*(\omega)\|\le(1-\Upsilon(x_{n+1}(\omega),x^*(\omega))\alpha_n)\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|+$$
$$\alpha_n f_n\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|+\alpha_n A_n(\omega)+B_n(\omega). \tag{13}$$

其中

$$f_n=2\beta_n(1+\mu+\xi+\gamma)(1+(1+\mu+\xi+\gamma)^2)+$$
$$2\alpha_n(1+\mu+\xi+\gamma)((\mu+\xi+\gamma+2)+(1+\mu+\xi+\gamma)^3\beta_n),$$
$$A_n(\omega)=2(1+\mu+\xi+\gamma)^2\left[\begin{array}{l}(1+\mu+\xi+\gamma)\alpha_n\beta_n\delta_n\gamma+\alpha_n\beta_n\gamma+\alpha_n\|v_n(\omega)\|+\\(1+\mu+\xi+\gamma)\alpha_n\beta_n\|w_n(\omega)\|+\end{array}\right.$$
$$\|u_n(\omega)\|]+2\alpha_n\beta_n\delta_n\gamma(1+\mu+\xi+\gamma)^2+2(\mu+\xi+\gamma+1)((\alpha_n+\beta_n)\gamma+\alpha_n\|v_n'(\omega)\|+\|u_n(\omega)\|)+$$
$$2\varepsilon_n+2\|\partial_\eta\varphi(g(\omega,x_{n+1}(\omega)),x_{n+1}(\omega))-\partial_\eta\varphi(g(\omega,y_n(\omega)),y_n(\omega))\|.\ \forall n\ge 0,\varepsilon_n\ge 0 \text{ 且 } \varepsilon_n\to 0(n\to\infty).$$

$B_n(\omega) = 2(\mu+\xi+\gamma+1)^2\alpha_n\beta_n\|w_n(\omega)\| + (\mu+\xi+\gamma+1)\alpha_n\|v''_n(\omega)\| + \|u''_n(\omega)\|$.

因对每一 $\omega\in\Omega$, $\|\partial_\eta\varphi(g(\omega,x_{n+1}(\omega)),x_{n+1}(\omega)) - \partial_\eta\varphi(g(\omega,y_n(\omega)),y_n(\omega))\|\to 0(n\to\infty)$, $\|v'_n(\omega)\|\to 0,\alpha_n\to 0,\beta_n\to 0,\varepsilon_n\to 0(n\to\infty)$,易知对每一 $\omega\in\Omega$, $f_n\to 0,A_n(\omega)\to 0(n\to\infty)$.

由 $\sum_{n=0}^{\infty}\|u''_n(\omega)\| < \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\|v''_n(\omega)\| < \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n\|w_n(\omega)\| < \infty$, 可知 $\sum_{n=0}^{\infty}B_n(\omega) < \infty$. 因 $\|u_n(\omega)\|\to 0$, $\alpha_n\|v_n(\omega)\|\to 0,\alpha_n\beta_n\|w_n(\omega)\|\to 0(n\to\infty)$, 由(3)和(10),对每一 $\omega\in\Omega$, $\forall n\geq 0$,有

$$\frac{\|x_{n+1}(\omega)-x^*(\omega)\|}{1+\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|}\leq\frac{\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\| + \alpha_n\|S(\omega,y_n)-x_n(\omega)\| + \|u_n(\omega)\|}{1+\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|}\leq$$

$$\frac{\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\| + \alpha_n((2+\mu+\xi+\gamma+(1+\mu+\xi+\gamma)^3\beta_n)\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|)}{1+\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|}+$$

$$\frac{\alpha_n((1+\mu+\xi+\gamma)^2\beta_n\delta_n\gamma+(1+\mu+\xi+\gamma)\beta_n\gamma)+\|u_n(\omega)\|}{1+\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|}+$$

$$\frac{(1+\mu+\xi+\gamma)\alpha_n\|v_n(\omega)\| + (1+\mu+\xi+\gamma)^2\alpha_n\beta_n\|w_n(\omega)\| + \alpha_n\gamma}{1+\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|}\leq G$$

其中 $G = 3+\mu+\xi+\gamma+(1+\mu+\xi+\gamma)^3+((1+\mu+\xi+\gamma)^2+(1+\mu+\xi+\gamma))(1+\gamma)+\gamma$.

取充分大的 $n_2\geq n_1$,使得对每一 $\omega\in\Omega$, $x_{n_2}(\omega)\neq x^*(\omega)$(若否对 $\forall n\geq n_1$,对每一 $\omega\in\Omega$,有 $x_n(\omega) = x^*(\omega)$,则 $x_n(\omega)\to x^*(\omega)(n\to\infty)$,此时定理1证完). 由于 $f_n\to 0,A_n(\omega)\to 0(n\to\infty)$ 且 $\sum_{n=0}^{\infty}B_n(\omega) < \infty$,所以存在正整数 $m\geq n_2$,使 $\forall n\geq m$,对每一 $\omega\in\Omega$,有

$$f_n(2Q(\omega))+A_n(\omega) < \frac{\Phi(Q(\omega))Q(\omega)}{2[1+G(1+Q(\omega))+\Phi(G(1+Q(\omega)))]},\ \sum_{n=m}^{\infty}B_n(\omega) < Q(\omega),$$

其中 $Q(\omega) = \max\{\|x_{n_2}(\omega)-x^*(\omega)\|,\|x_{n_2+1}(\omega)-x^*(\omega)\|,\cdots,\|x_{m-1}(\omega)-x^*(\omega)\|,\|x_m(\omega)-x^*(\omega)\|\}$. 显然,对每一 $\omega\in\Omega$, $0 < Q(\omega) < \infty$,且 $\|x_m(\omega)-x^*(\omega)\|\leq Q(\omega)$.

下面我们用归纳法证明 $\forall n\geq m$,对每一 $\omega\in\Omega$,有

$$\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|\leq Q(\omega)+\sum_{k=m}^{n-1}B_k(\omega). \tag{14}$$

显然,当 $n = m$ 时(14)成立. 假设当 $n\geq m$ 时成立. 下面往证,对 $n+1$ 也成立. 假设不成立,则存在 $\omega_0\in\Omega$,使得 $\|x_{n+1}(\omega_0)-x^*(\omega_0)\| > Q(\omega_0)+\sum_{k=m}^{n}B_k(\omega_0)$,从而 $\|x_{n+1}(\omega_0)-x^*(\omega_0)\| > Q(\omega_0)$. 由 Φ 的严格递增性,有

$$\Upsilon(x_{n+1}(\omega_0),x^*(\omega_0)) =$$

$$\frac{\Phi(\|x_{n+1}(\omega_0)-x^*(\omega_0)\|)}{1+\left(\frac{\|x_{n+1}(\omega_0)-x^*(\omega_0)\|}{1+\|x_n(\omega_0)-x^*(\omega_0)\|}\right)(1+\|x_n(\omega_0)-x^*(\omega_0)\|)+\Phi\left(\frac{\|x_{n+1}(\omega_0)-x^*(\omega_0)\|}{1+\|x_n(\omega_0)-x^*(\omega_0)\|}(1+\|x_n(\omega_0)-x^*(\omega_0)\|)\right)}\geq$$

$$\frac{\Phi(Q(\omega_0))}{1+G(1+Q(\omega_0))+\Phi(G(1+Q(\omega_0)))}.$$

由(13)可得

$$\|x_{n+1}(\omega_0)-x^*(\omega_0)\|\leq(1-\alpha_n\Upsilon(x_{n+1}(\omega_0),x^*(\omega_0)))\|x_n(\omega_0)-x^*(\omega_0)\| +$$

$$\alpha_n f_n\|x_n(\omega_0)-x^*(\omega_0)\| + \alpha_n A_n(\omega_0)+B_n(\omega_0)\leq$$

$$(1-\alpha_n\Upsilon(x_{n+1}(\omega_0),x^*(\omega_0)))\Big(Q(\omega_0)+\sum_{k=m}^{n-1}B_k(\omega_0)\Big)+$$

$$\alpha_nf_n\|x_n(\omega_0)-x^*(\omega_0)\|+\alpha_nA_n(\omega_0)+B_n(\omega_0)=$$

$$Q(\omega_0)+\sum_{k=m}^{n-1}B_k(\omega_0)-\alpha_n\Upsilon(x_{n+1}(\omega_0),x^*(\omega_0))\Big(Q(\omega_0)+\sum_{k=m}^{n-1}B_k(\omega_0)\Big)+$$

$$\alpha_nf_n\|x_n(\omega_0)-x^*(\omega_0)\|+\alpha_nA_n(\omega_0)+B_n(\omega_0)\le$$

$$Q(\omega_0)+\sum_{k=m}^{n-1}B_k(\omega_0)-\alpha_n\Upsilon(x_{n+1}(\omega_0),x^*(\omega_0))Q(\omega_0)+$$

$$\alpha_nf_n\|x_n(\omega_0)-x^*(\omega_0)\|+\alpha_nA_n(\omega_0)+B_n(\omega_0)\le$$

$$Q(\omega_0)+\sum_{k=m}^{n-1}B_k(\omega_0)-\alpha_n\left(\frac{\Phi(Q(\omega_0))Q(\omega_0)}{1+G(1+Q(\omega_0))+\Phi(G(1+Q(\omega_0)))}-f_n(2Q(\omega_0))-A_n(\omega_0)\right)+B_n(\omega_0)\le$$

$$Q(\omega_0)+\sum_{k=m}^{n-1}B_k(\omega_0)-$$

$$\alpha_n\frac{\Phi(Q(\omega_0))Q(\omega_0)}{2[1+G(1+Q(\omega_0))+\Phi(G(1+Q(\omega_0)))]}+B_n(\omega_0)\le$$

$$Q(\omega_0)+\sum_{k=m}^{n-1}B_k(\omega_0)+B_n(\omega_0)=Q(\omega_0)+\sum_{k=m}^{n}B_k(\omega_0).$$

这是一个矛盾. 因此当 $\forall n\ge m$ 时, 对每一 $\omega\in\Omega$, (14)成立. 从而由(14)得

$$\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|\le Q(\omega)+\sum_{k=m}^{\infty}B_k(\omega)\le Q(\omega)+Q(\omega)=2Q(\omega),$$

即 $\{x_n(\omega)\}$ 对 $\omega\in\Omega$ 点态有界. 于是由(13), $\forall n\ge m$,对每一 $\omega\in\Omega$, 有

$$\begin{aligned}&\|x_{n+1}(\omega)-x^*(\omega)\|\le(1-\Upsilon(x_{n+1}(\omega),x^*(\omega))\alpha_n)\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|+\\&\alpha_nf_n(2Q(\omega))+\alpha_nA_n(\omega)+B_n(\omega).\end{aligned}\tag{15}$$

令 $\inf\limits_{n\ge0}\{\|x_{n+1}(\omega)-x^*(\omega)\|\}=r(\omega)$, $\omega\in\Omega$, 则对每一 $\omega\in\Omega$, $r(\omega)\ge0$, 下面证对每一 $\omega\in\Omega$, $r(\omega)=0$,假设存在 $\omega_0\in\Omega$,使得 $r(\omega_0)>0$,则可取 $\tau(\omega_0)\in(0,\min\{1,r(\omega_0)\})$. 于是 $\exists n_3\ge n_1$, $\forall n\ge n_3$, 有 $\|x_{n+1}(\omega_0)-x^*(\omega_0)\|>\tau(\omega_0)$. 由于 $f_n\to0,A_n(\omega)\to0,B_n(\omega)\to0(n\to\infty)$,所以存在正整数 $\exists n_4\ge n_3$, $\forall n\ge n_4$, 对每一 $\omega\in\Omega$, 有 $f_n(2Q(\omega_0))+A_n(\omega_0)+B_n(\omega_0)<\frac{[\tau(\omega_0)]^2}{4}$, 以及 $f_n(2Q(\omega_0))+A_n(\omega_0)<\frac{\Phi(\tau(\omega_0))[\tau(\omega_0)]^2}{4[1+2Q(\omega_0)+\Phi(2Q(\omega_0))]}$, 从而 $\forall n\ge n_4$, 由(15)式有

$$\|x_n(\omega_0)-x^*(\omega_0)\|\ge\|x_{n+1}(\omega_0)-x^*(\omega_0)\|-\alpha_nf_n(2Q(\omega_0))-\alpha_nA_n(\omega_0)-B_n(\omega_0)\ge\frac{\tau(\omega_0)}{2}$$ 和

$$\|x_{n+1}(\omega_0)-x^*(\omega_0)\|\le\|x_n(\omega_0)-x^*(\omega_0)\|-\frac{\Phi(\tau(\omega_0))}{[1+2Q(\omega_0)+\Phi(2Q(\omega_0))]}\alpha_n\|x_n(\omega_0)-x^*(\omega_0)\|$$
$$+\alpha_n f_n(2Q(\omega_0))+\alpha_n A_n(\omega_0)+B_n(\omega_0)\le$$
$$\|x_n(\omega_0)-x^*(\omega_0)\|-\alpha_n\left\{\frac{\Phi(\tau(\omega_0))[\tau(\omega_0)]^2}{2[1+2Q(\omega_0)+\Phi(2Q(\omega_0))]}-f_n(2Q(\omega_0))-A_n(\omega_0)\right\}+B_n(\omega_0)\le$$
$$\|x_n(\omega_0)-x^*(\omega_0)\|-\alpha_n\frac{\Phi(\tau(\omega_0))[\tau(\omega_0)]^2}{4[1+2Q(\omega_0)+\Phi(2Q(\omega_0))]}+B_n(\omega_0)$$

从而有 $\frac{\Phi(\tau(\omega_0))[\tau(\omega_0)]^2}{4[1+2Q(\omega_0)+\Phi(2Q(\omega_0))]}\alpha_n\le\|x_n(\omega_0)-x^*(\omega_0)\|-\|x_{n+1}(\omega_0)-x^*(\omega_0)\|+B_n(\omega_0)$.
据此对任意正整数 $h\ge n_4$, 有

$$\frac{\Phi(\tau(\omega_0))[\tau(\omega_0)]^2}{4[1+2Q(\omega_0)+\Phi(2Q(\omega_0))]}\sum_{n=n_4}^{h}\alpha_n\le\|x_{n_4}(\omega_0)-x^*(\omega_0)\|-\|x_{h+1}(\omega_0)-x^*(\omega_0)\|+\sum_{n=n_4}^{h}B_n(\omega_0)\le$$
$$\|x_{n_4}(\omega_0)-x^*(\omega_0)\|+\sum_{n=n_4}^{\infty}B_n(\omega_0),$$

所以 $\infty=\frac{\Phi(\tau(\omega_0))[\tau(\omega_0)]^2}{4[1+2Q(\omega_0)+\Phi(2Q(\omega_0))]}\sum_{n=n_4}^{\infty}\alpha_n\le\|x_{n_4}(\omega_0)-x^*(\omega_0)\|+\sum_{n=n_4}^{\infty}B_n(\omega_0)$,这是一个矛盾. 因此对每一 $\omega\in\Omega$, $r(\omega)=0$. 进而对每一 $\omega\in\Omega$, 存在子列 $\{x_{n_j+1}(\omega)\}\subset\{x_{n+1}(\omega)\}$,使得 $\lim\limits_{j\to\infty}\|x_{n_j+1}(\omega)-x^*(\omega)\|=0$,于是 $\forall\varepsilon\in(0,1)$ $\exists n_5>1$, $\forall n_j>n_5$, 对每一 $\omega\in\Omega$, 有
$\|x_{n_j+1}(\omega)-x^*(\omega)\|<\varepsilon$. 又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=0$, $A_n(\omega)\to 0(n\to\infty)$, 故 $\forall\varepsilon\in(0,1)$, $\exists n_{j0}>n_5$, 使 $\forall n\ge n_{j0}$, 对每一 $\omega\in\Omega$, 有 $f_n(2Q(\omega))+A_n(\omega)<\frac{\Phi(\varepsilon)\varepsilon}{4[1+2Q(\omega)+\Phi(2Q(\omega))](1+2Q(\omega))}$,

$$\|x_{n_{j0}+1}(\omega)-x^*(\omega)\|<\varepsilon,\ 和\ \sum_{k=n_{j0}+1}^{\infty}B_k(\omega)<\varepsilon.$$

下面证明 $\forall m\ge 1$,对每一 $\omega\in\Omega$, 有 $\|x_{n_{j0}+m}(\omega)-x^*(\omega)\|\le\varepsilon+\left(\sum_{k=n_{j0}+1}^{n_{j0}+m-1}B_k(\omega)\right)$.

当 $m=1$ 时, 显然成立;假设 $m=i$ 时成立, 下面证明 $m=i+1$ 时成立, 假设相反,即存在 $\omega_0\in\Omega$, $\|x_{n_{j0}+i+1}(\omega_0)-x^*(\omega_0)\|>\varepsilon+\left(\sum_{k=n_{j0}+1}^{n_{j0}+i}B_k(\omega_0)\right)$,则 $\|x_{n_{j0}+i+1}(\omega_0)-x^*(\omega_0)\|>\varepsilon$,由 Φ 的严格增加性有

$$\Upsilon(x_{n_{j0}+i+1}(\omega_0),x^*(\omega_0))=\frac{\Phi(\|x_{n_{j0}+i+1}(\omega_0)-x^*(\omega_0)\|)}{1+\|x_{n_{j0}+i+1}(\omega_0)-x^*(\omega_0)\|+\Phi(\|x_{n_{j0}+i+1}(\omega_0)-x^*(\omega_0)\|)}\ge$$
$$\frac{\Phi(\varepsilon)}{1+2Q(\omega_0)+\Phi(2Q(\omega_0))}$$
由(15)式,有

$$\|x_{n_{j0}+i+1}(\omega_0)-x^*(\omega_0)\|\le(1-\Upsilon(x_{n_{j0}+i+1}(\omega_0),x^*(\omega_0))\alpha_{n_{j0}+i})\|x_{n_{j0}+i}(\omega_0)-x^*(\omega_0)\|+$$
$$\alpha_{n_{j0}+i}(f_{n_{j0}+i}(2Q(\omega_0))+A_{n_{j0}+i}(\omega_0))+B_{n_{j0}+i}(\omega_0)\le$$
$$(1-\Upsilon(x_{n_{j0}+i+1}(\omega_0),x^*(\omega_0))\alpha_{n_{j0}+i})\left(\varepsilon+\left(\sum_{k=n_{j0}+1}^{n_{j0}+i-1}B_k(\omega_0)\right)\right)+$$
$$\alpha_{n_{j0}+i}(f_{n_{j0}+i}(2Q(\omega_0))+A_{n_{j0}+i}(\omega_0))+B_{n_{j0}+i}(\omega_0)=$$

$$\varepsilon+\left(\sum_{k=n_{j_0}+1}^{n_{j_0}+i-1}B_k(\omega_0)\right)-\Upsilon(x_{n_{j_0}+i+1}(\omega_0),x^*(\omega_0))\alpha_{n_{j_0}+i}\left(\varepsilon+\left(\sum_{k=n_{j_0}+1}^{n_{j_0}+i-1}B_k(\omega_0)\right)\right)+$$
$$\alpha_{n_{j_0}+i}(f_{n_{j_0}+i}(2Q(\omega_0))+A_{n_{j_0}+i}(\omega_0))+B_{n_{j_0}+i}(\omega_0)\le$$

$$\varepsilon+\left(\sum_{k=n_{j_0}+1}^{n_{j_0}+i-1}B_k(\omega_0)\right)-\Upsilon(x_{n_{j_0}+i+1}(\omega_0),x^*(\omega_0))\alpha_{n_{j_0}+i}\varepsilon+$$
$$\alpha_{n_{j_0}+i}(f_{n_{j_0}+i}(2Q(\omega_0))+A_{n_{j_0}+i}(\omega_0))+B_{n_{j_0}+i}(\omega_0)\le$$
$$\varepsilon+\left(\sum_{k=n_{j_0}+1}^{n_{j_0}+i-1}B_k(\omega_0)\right)-$$
$$\alpha_{n_{j_0}+i}\left(\frac{\Phi(\varepsilon)\varepsilon}{1+2Q(\omega_0)+\Phi(2Q(\omega_0))}-(f_{n_{j_0}+i}(2Q(\omega_0))+A_{n_{j_0}+i}(\omega_0))\right)+B_{n_{j_0}+i}(\omega_0)\le$$
$$\varepsilon+\left(\sum_{k=n_{j_0}+1}^{n_{j_0}+i-1}B_k(\omega_0)\right)+B_{n_{j_0}+1}(\omega_0)=\varepsilon+\left(\sum_{k=n_{j_0}+1}^{n_{j_0}+i}B_k(\omega_0)\right).$$

这是一个矛盾，因此由归纳法可证 $\forall m\ge 1$，对每一 $\omega\in\Omega$，有

$$\|x_{n_{j_0}+m}(\omega)-x^*(\omega)\|\le\varepsilon+\left(\sum_{k=n_{j_0}+1}^{n_{j_0}+m-1}B_k(\omega)\right)\le 2\varepsilon\ ,$$

即对每一 $\omega\in\Omega$，有 $\|x_n(\omega)-x^*(\omega)\|\to 0(n\to\infty)$. 因 $x^*:\Omega\to X$ 是可测函数序列 $\{x_n\}:\Omega\to X$ 的逐点极限，由文[24]知 x^* 也是可测的，于是由引理 1，$S(\cdot,x^*(\cdot)):\Omega\to X$ 是可测的. 因 $x^*(\omega)=S(\omega,x^*(\omega))$，故 $x^*:\Omega\to X$ 是 S 随机不动点，进而由引理 3 知 $x^*:\Omega\to X$ 是变分包含问题(1)的随机解. 证毕.

注 3　定理 1 从四个方面改进与推广了[7]中的结果.

(ⅰ)将稳定型变分包含问题扩展到随机变分包含问题(1)式.

(ⅱ)用 $\varphi(\cdot,\cdot):X^*\times X\to R\cup\{+\infty\}$ 取代 $\varphi(\cdot):X^*\to R\cup\{+\infty\}$，其中 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 是一双变元函数且对第一变元是真凸和下半连续的.

(ⅲ)将带误差的 Ishikawa 迭代序列推广到带混合误差的随机 Noor 迭代序列的情形，而且 $v_n(\omega)=v'_n(\omega)+v''_n(\omega)$ 增加的误差项 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\|v''_n(\omega)\|<\infty$，这里 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\|v''_n(\omega)\|<\infty$ 未必有 $\|v''_n(\omega)\|\to 0$ $(n\to\infty)$.

(ⅳ)用 $\|\partial_\eta\varphi(g(x_{n+1}),x_{n+1})-\partial_\eta\varphi(g(y_n),y_n)\|\to 0(n\to\infty)$ 取代了 $\partial_\eta\varphi\circ g:X\to X$ 一致连续.

(ⅴ)序列 $\{x_n\}$ 有界性被放弃.

(ⅵ)序列 $\{\partial_\eta\varphi(g(x_n))\}$ 有界性被 $\{\partial_\eta\varphi(g(\omega,x),x)\}$ 是 γ－广义 *Lipschitz* 所取代.

(ⅶ)定理 1 中的证明方法不同于文[7]所用的方法.

注 4　定理 1 从四个方面改进与推广了[6]中的结果.

(ⅰ)将稳定型变分包含问题扩展到随机变分包含问题(1)式.

(ⅱ)将带误差的 Ishikawa 迭代序列推广到随机算子带混合误差的随机 Noor 迭代序列的情形，而且 $v_n(\omega)=v'_n(\omega)+v''_n(\omega)$ 增加了误差项 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\|v''_n(\omega)\|<\infty$ 与 $\|v'_n(\omega)\|\to 0(n\to\infty)$.

(ⅲ)证明过程中我们建立的 $\|S(\omega,x_{n+1})-S(\omega,y_n)\|$ 等的估计式更精细.

(ⅳ)序列 $\{x_n\}$ 有界性被放弃.

在定理 1 中取 $\Phi(t)=kt(0<k<1)$,便得如下结果:

推论 1 设 X 是可分的自反 Banach 空间, $T,A:\Omega\times X\to X,N(\cdot,\cdot):X\times X\to X$, $\eta:X^*\times X^*\to X^*$ 和 $g:\Omega\times X\to X^*$ 是五个映象, $\varphi(\cdot,\cdot):X^*\times X\to R\cup\{+\infty\}$ 是具有 η - 次微分 $\partial_\eta\varphi$ 的双函数且对第一变元是真凸和下半连续的. 设 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\delta_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的实数列,对每一 $\omega\in\Omega$, $\{u_n(\omega)\}$, $\{v_n(\omega)\}$, $\{w_n(\omega)\}$, $\{u_n'(\omega)\}$, $\{u_n''(\omega)\}$, $\{v_n'(\omega)\}$ 和 $\{v''_n(\omega)\}$ 都是 X 中的可测序列,且满足以下条件:

(ⅰ)对 $\forall\omega\in\Omega$, $N(T(\omega,\cdot),A(\omega,\cdot))+\partial_\eta\varphi(g(\omega,\cdot)\cdot):X\to X$ 是连续的随机 k - 强增生的;

(ⅱ)对 $\forall\omega\in\Omega$, 映象 $x\to N(x,y)$ 关于 T 是 μ - *Lipschitz* 连续的,映象 $y\to N(x,y)$ 关于 A 是 ξ - *Lipschitz* 的;

(ⅲ) $\alpha_n\to 0,\beta_n\to 0,\delta_n\to 0(n\to\infty)$, $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$;$(v)$ $u_n(\omega)=u_n'(\omega)+u''_n(\omega)$, $\|u_n'(\omega)\|=o(\alpha_n)$, $v_n(\omega)=v_n'(\omega)+v''_n(\omega)$, $\|v_n'(\omega)\|\to 0(n\to\infty)$, $\sum_{n=0}^{\infty}\|u''_n(\omega)\|<\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\|v''_n(\omega)\|<\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n\|w_n(\omega)\|<\infty$. 对任给的 $f:\Omega\to X$, 定义映象 $S:\Omega\times X\to X$ 如下:

$S(\omega,x)=f(\omega)-(N(T(\omega,x),A(\omega,x))+\partial_\eta\varphi(g(\omega,x),x))+x,\forall x\in X$.

对任给的 $x_0(\omega)\in X$,具有混合误差项的随机 Noor 迭代序列 $\{x_n(\omega)\}\subset X$ 定义如下:

$$\begin{cases}x_{n+1}(\omega)=(1-\alpha_n)x_n(\omega)+\alpha_nS(\omega,y_n(\omega))+u_n(\omega),\\ y_n(\omega)=(1-\beta_n)x_n(\omega)+\beta_nS(\omega,z_n(\omega))+v_n(\omega),\\ z_n(\omega)=(1-\delta_n)x_n(\omega)+\delta_nS(\omega,x_n(\omega))+w_n(\omega),n\ge 0,\end{cases}\tag{16}$$

若对 $\forall\omega\in\Omega$, $\|\partial_\eta\varphi(g(\omega,x_{n+1}(\omega)),x_{n+1}(\omega))-\partial_\eta\varphi(g(\omega,y_n(\omega)),y_n(\omega))\|\to 0(n\to\infty)$ 且序列 $\{\partial_\eta\varphi(g(\omega,x),x)\}$ 是 γ - 广义 Lipschitz 的, 则随机变分包含问题(1)存在唯一随机解 $x^*(\omega)\in X$,且由(16)式定义的随机 Noor 迭代序列 $\{x_n(\omega)\}$ 强收敛于(1)的唯一随机解 $x^*(\omega)$.

由定理 1 可得稳定型变分包含问题(∗)的迭代逼近结果如下:

推论 2 设 X 是自反 Banach 空间, $T,A:X\to X,N(\cdot\cdot):X\times X\to X$, $\eta:X^*\times X^*\to X^*$ 和 $g:X\to X^*$ 是五个映象, $\varphi(\cdot,\cdot):X^*\times X\to R\cup\{+\infty\}$ 是具有 η - 次微分 $\partial_\eta\varphi$ 的双函数且对第一变元是真凸和下半连续的. 设 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\delta_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的实数列, $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, $\{w_n\}$, $\{u_n'\}$, $\{u_n''\}$, $\{v_n'\}$ 和 $\{v''_n\}$ 都是 X 中的序列,且满足以下条件

(ⅰ) $N(T(\cdot),A(\cdot))+\partial_\eta\varphi(g(\cdot),\cdot):X\to X$ 是连续的 Φ - 强增生的;

(ⅱ)映象 $x\to N(x,y)$ 关于 T 是 μ - Lipschitz 连续的,映象 $y\to N(x,y)$ 关于 A 是 ξ - Lipschitz 的;

(ⅲ) $\alpha_n\to 0,\beta_n\to 0,\delta_n\to 0(n\to\infty)$, $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$;$(v)$ $u_n=u_n'+u''_n$, $\|u_n'\|=o(\alpha_n)$, $v_n=v_n'+v''_n$, $\|v_n'\|\to 0(n\to\infty)$, $\sum_{n=0}^{\infty}\|u''_n\|<\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\|v''_n\|<\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n\|w_n\|<\infty$. 对任给的 $f\in X$, 定义映象 $S:X\to X$ 如下

$S(x)=f-(N(T(x),A(x))+\partial_\eta\varphi(g(x),x))+x,\forall x\in X$.

对任给的 $x_0\in X$,具有混合误差项的 Noor 迭代序列 $\{x_n\}\subset X$ 定义如下

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n S y_n + u_n, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n S z_n + v_n, \\ z_n = (1-\delta_n)x_n + \delta_n S x_n + w_n, n \geq 0, \end{cases} \tag{17}$$

若 $\| \partial_\eta \varphi(g(x_{n+1}), x_{n+1}) - \partial_\eta \varphi(g(y_n), y_n) \| \to 0 (n \to \infty)$ 且序列 $\{\partial_\eta \varphi(g(x), x)\}$ 是 γ－广义 Lipschitz 的，则稳定型变分包含问题(＊)存在唯一解 $x^* \in X$，且由(17)式定义的 Noor 迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛于(＊)的唯一解 x^*.

参考文献

[1] 张树义. *Banach* 空间中 k－次增生型变分包含解的存在与收敛性[J]. 系统科学与数学, 2012, 32(3): 363 – 376.

[2] ZHANG S Y, GUO X Q. Noor iterative approximation for solutions to variational inclusions with subaccretive type mappings in reflexive Banach spaces[J]. Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, 2012, 20(1): 505－517.

[3] 张树义, 郭新琪. 一类 k－次增生型变分包含解的存在性与 Noor 迭代逼近[J]. 数学的实践与认识, 2013, 43(3): 170－175.

[4] 张树义, 万美玲, 赵亚莉. 一类变分包含问题解的多步迭代收敛性与稳定性[J]. 数学的实践与认识, 2015, 45(4): 242－251.

[5] 张树义, 万美玲, 赵亚莉. 渐近 φ－拟伪压缩型集值变分包含解的迭代逼近[J]. 系统科学与数学, 2014,34(4): 504－512

[6] 万美玲, 张树义. Banach 空间中 φ－强增生型变分包含解的迭代逼近[J]. 石河子大学学报(自然科学版),2018, 24(2): 297－304.

[7] 谷峰. 一类新的 φ－强增生型变分包含问题解的存在性与迭代逼近[J]. 数学进展,2008,37(4):469－477

[8] 曾六川. 一类 φ－强增生型变分包含问题解的存在性与迭代逼近[J]. 数学研究与评论, 2004, 24(2): 297－304.

[9] 曾六川. Banach 空间中 φ－强增生型变分包含问题解的存在性与迭代方法[J]. 高等学校计算数学学报, 2003, 25(2):126－134.

[10] 袁林,曾六川. 一类具广义 Lipschitz 的 k－次增生型变分包含解的迭代逼近[J]. 上海师范大学学报(自然科学版). 2009, 38(1): 29－34.

[11] 张树义, 宋晓光. 非 Lipschitz 有限族集值广义渐近 φ－半压缩映象的强收敛定理[J]. 系统科学与数学, 2014,34(9): 1051－1058.

[12] 张树义. 一致 Lipschitz 渐近 φ_i－型拟伪压缩映象多步平行迭代算法的收敛性[J]. 系统科学与数学, 2013, 33(11): 1233－1242.

[13] 张树义,赵美娜,丛培根. Browder－Petryshyn 型严格伪压缩映象复合迭代算法的收敛性[J]. 高等学校计算数学学报, 2017,39(4):334－339.

[14] 张树义, 张芯语. 严格伪压缩半群隐式迭代序列的强收敛定理[J]. 安徽大学学报(自然科学版), 2019, 43(6):20－25

[15] 张树义,赵美娜,丛培根. 广义渐近 S－半压缩型映象迭代逼近[J]. 西华师范大学学报(自然科学版), 2017, 38(4): 399－400.

[16] ZHANG S Y. Implicit iteration approximation for a finite family of asymptotically quasi－pseudocontractive type mappings[J]. Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 2014, 40(1): 263－279.

[17] 张树义. 赋范线性空间中渐近拟伪压缩型映象不动点的修改的广义 Ishikawa 迭代逼近[J]. 应用数学学报, 2011, 34(5): 886－894.

[18] 张芯语, 张树义. 增生算子扰动方程的迭代解[J]. 沈阳大学学报(自然科学版), 2019, 31(4): 349－354.

[19] 张树义, 张芯语, 聂辉. 有限族广义渐近拟伪压缩型非自映象的迭代逼近[J]. 天津师范大学学报(自然科学版), 2019, 39(5): 16－21.

[20] DING X P. Generalized quasi－variational－like inclusions with nonconvex functions[J]. Applied Mathematics and Computation, 2001, 122 (3): 267－282

[21] 倪仁兴. 一类广义 Lipschitz 非线性算子的带误差的 Ishikawa 迭代程序[J]. 数学学报, 2001, 44(4):701－712.

[22] TAN K K., YUAN X Z. Some random fixed point theorems[J]. Fixed Point Theory and Applications, 1992, 334 – 345.

[23] LIU Z Q, KANG S M. Convergence theorems for ϕ－strongly accretive and ϕ－hemicontractive operators [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 253: 35－49.

[24] HIMMELBERG C J. Measurable relation[J]. Fundamenta mathematicae,1975, 87: 53－71.

(责任编辑:张阳,付强,李建忠,罗敏;英文编辑:周序林)