doi:10.11920/xnmdzk.2019.04.009

关于球面单演函数的博克纳公式

李珊珊

(西南民族大学计算机科学与技术学院,四川 成都 610041)

摘 要:在克里佛德分析的框架下,研究了 $L^2(\mathbb{R}^d;Cl_{0,d})$ 空间的直和分解,使得每个子空间在一种广义傅里叶变换下是保持不变的,这种广义傅里叶变换称为克里佛德-傅里叶变换. 同时,还得到了 $L^2(\mathbb{R}^d;Cl_{0,d})$ 的每个子空间中函数克里佛德-傅里叶变换的具体表达式,这推广了经典的球面单演函数的博克纳(Bochner)公式.

关键词:克里佛德分析;克里佛德-傅里叶变换;球面单演函数;博克纳公式

中图分类号:O174.22 **文献标志码**:A **文章编号**:2095-4271(2019)04-0390-06

Bochner's formula for spherical monogenics

LI Shan-shan

(School of Computer Science and Technology, Southwest Minzu University, Chengdu 610041, P. R. C.)

Abstract: In the framework of Clifford analysis, we study the counterpart of a direct sum decomposition of $L^2(\mathbb{R}^d;Cl_{0,d})$ into subspaces which are invariant under a generalized Fourier transform, which is called Clifford-Fourier transform in the literature. The explicit Clifford-Fourier transform formula for each component of a function in $L^2(\mathbb{R}^d;Cl_{0,d})$ is established, which generalizes the Bochner's formula for spherical monogenics.

Key words: Clifford analysis; Clifford-Fourier transform; spherical monogenics; Bochner's formula

1 引言

经典的傅里叶变换在基础数学和应用数学中是非常重要的. 但在信号处理领域,源于电信技术的多道传输现在已经广泛应用于电子技术、通信、数字视频、计算机网络的各个方面,这促使我们去研究和发展向量值函数 $f=(f_1,f_2,\cdots,f_N)$ 的函数理论. 从数学的角度来说,多道传输的思想就是将 N 个相互独立的函数 $f_j\in L^2(R^d;C)$, $j=1,2,\cdots,N$,编码成一个能捕捉每个分量信息的向量值函数 f[1-4]. 众所周知,克里佛德代数是由 d 个正规正交基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_d\}$ 生成的维数为 2^d 的非交换代数,它给我们提供了一种具体方法来表示向量值函数. 而克里佛德分析[5-6]是对欧氏空间 R^d 上的调和分析[7]的一种推广,从代数的背景来说,经典的调和分析是基于拉普拉斯算子 Δ 和平方模 $|x|^2$ 生成的李代数 sl_2,克里佛德分析是将经典的李代数 sl_2 改进成超李代数 $sop(1|2)$(它包含 sl_2 作为其偶子代数).

如何将经典的傅里叶变换推广到克里佛德分析中是近年来的热点研究课题,关于此问题的讨论已经有许多的推广结果[8-12]. 在本文中,考虑的是最早出现在文献[13]中,并且在文献[14]得到进一步发展的一种基于

收稿日期:2019-04-17
作者简介:李珊珊(1980-),女,汉族,四川成都人,副教授,研究方向:超复分析. E-mail:ssrubyli@163.com
基金项目:西南民族大学中央高校基金资助项目(2015NZYQN27)

超李代数的克里佛德-傅里叶变换(以下简记为 CFT). 它推广了经典的傅里叶变换,但它包含了生成子代数 $sop(1|2)$. 具体来讲,记 $\partial_y := \sum_{j=1}^{d} e_j \partial_{y_j}$ 为克里佛德分析中的迪拉克(Dirac)算子,则 CFT 可以表示为下面的积分形式:

$$F_{\pm}(f)(y) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} K_{\pm}(x,y) f(x) dx, \tag{1}$$

这里的核函数 $K_{\pm}(x,y) = e^{\mp i\frac{\pi}{2}\Gamma_y} e^{-ix\cdot y}$,而 $\Gamma_y := (\partial_y y - y\partial_y)/2 + d/2$. 在文献[14]中,其作者们已经具体讨论了关于此 CFT 的代数背景和核函数. 具体来讲,当维数 d 是偶数时,核函数是关于贝塞尔(Bessel)函数的有限和;当维数 d 是奇数时,核函数是关于贝塞尔函数的积分形式.

在分析学中,将一个复杂的函数空间分解成简单的子空间的直和,并且子空间在某种变换下保持不变是很重要的课题,基于文献[14]和[15]中球面单演函数理论,考虑将空间 $L^2(R^d)$ 分解成若干子空间的直和,其在 CFT 下是保持不变的. 这一步一般来讲是容易的,但是 CFT 是如何作用在每个子空间上的是比较困难的问题. 本文的主要目的是得到了 CFT 作用在 $L^2(R^d)$ 的每个子空间函数的具体表达形式,这推广了经典球调和分析中的博克纳公式以及李子代数情况下的球面单演函数.

2　预备知识

假设 $\{e_1, e_2, \cdots, e_d\}$ 是 d 维欧式空间 R^d 的正规正交基,且满足下列反交换关系:

$$e_j e_k + e_k e_j = -2\delta_{jk}, \tag{2}$$

这里 δ_{jk} 是克罗内克(Kronecker)符号. 复克里佛德代数 $Cl_{0,d}$ 是定义为维数是 2^d 的结合代数,并且基为 $e_0 = 1$ 和 $e_A = e_{h_1} e_{h_2} \cdots e_{h_n}$,这里 $A = \{h_1, h_2, \cdots, h_n\} \subset \{1, 2, \cdots, d\}$,且 $1 \le h_1 < h_2 < \cdots < h_n \le d$. 这样,任一 $x \in Cl_{0,d}$ 可以表示为 $x = \sum_A x_A e_A$, $x_A \in \mathbb{C}$,这里 $\mathbb{C}$ 表示复平面. 复克里佛德代数 $Cl_{0,d}$ 是复线性的、结合的但非交换的代数.

R^d 中的元素可表示为 $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_d e_d$, $x_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \cdots, d$. R^d 中两个向量的内积和外积定义如下:

$$x \cdot y := \sum_{j=1}^{d} x_j y_j = -\frac{1}{2}(xy + yx),$$

$$x \wedge y := \sum_{j<k} e_j e_k (x_j y_k - x_k y_j) = \frac{1}{2}(xy - yx).$$

上述表达式中向量 x 和 y 的乘积用公式(2)来定义. 如果定义任一 $a \in Cl_{0,d}$ 的克里佛德共轭如下:

$$\bar{a} := \sum_{|A|=n} \bar{a}_A \bar{e}_A, \quad \bar{e}_A = (-1)\frac{n(n+1)}{2} e_A, \quad a_A \in \mathbb{C},$$

这里 $\bar{a}_A$ 表示复数的共轭,则对任意 $a, b \in Cl_{0,d}$,有 $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$,并且对任意向量 $x, y \in \mathbb{R}^d$ 有 $\overline{x \wedge y} = y \wedge x$.

由上述共轭准则可得对于任意 $f, g \in Cl_{0,d}$, $f\bar{g}$ 的数量值部分为

$$[f\bar{g}]_0 := \sum_A f_A \bar{g}_A, \quad f_A, g_A \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

若在公式(3)中取 $f = g$,可得任一 $f \in Cl_{0,d}$ 的模为

$$|f| := \sqrt{[f\bar{f}]_0} = \sqrt{\sum_A |f_A|^2} = |\bar{f}|. \tag{4}$$

注意到向量 $x \in \mathbb{R}^d$ 平方是数值的,并且等于它的范数的平方的相反数. 一般来讲,对于任意 $a, b \in Cl_{0,d}$,有 $|ab| \le 2^d |a||b|$ 和 $|a+b| \le |a| + |b|$. 但如果 $a \in \mathbb{R}^d$ 和 $b \in Cl_{0,d}$,可推出

$$|ab| = |a||b|. \tag{5}$$

记 $L^p(\mathbb{R}^d; Cl_{0,d})$ 为所有克里佛德值的函数 $f: \mathbb{R}^d \to Cl_{0,d}$ 所构成的空间且有如下定义的有限范数

$$\|f\|_p = \begin{cases} (\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx)\frac{1}{p}, 1 \le p \le \infty, \\ ess\ \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)|, p = \infty, \end{cases} \tag{6}$$

这里 $dx = dx_1 \cdots dx_d$ 表示$\mathbb{R}^d$ 中的勒贝格测度. 特别地,$L^2(\mathbb{R}^d;Cl_{0,d})$中的内积定义为

$$<f,g>:=\int_{\mathbb{R}^d}[f(x)\overline{g(x)}]_0 dx. \tag{7}$$

这里注意到:若公式(7)中的函数f和g取复数值,则上述内积退化成$L^2(\mathbb{R}^d;Cl_{0,d})$的子空间$L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$的标准内积,即,$[f(x)\overline{g(x)}]_0 = f(x)\overline{g(x)}$.

现在考虑文献[13]和[14]中引入的克里佛德-傅里叶变换(以下简记为 CFT)的定义和基本性质:

定义 2.1 记 $S(\mathbb{R}^d;Cl_{0,d})$为克里佛德值的施瓦兹(Schwartz)函数类,定义$f\in S(\mathbb{R}^d;Cl_{0,d})$的 CFT 如下:

$$F_{\pm}f(y):=(2\pi)-\frac{d}{2}\int_{\mathbb{R}^d}K_{\pm}(x,y)f(x)dx, \tag{8}$$

它相应的逆变换为:

$$F_{\pm}^{-1}f(y):=(2\pi)-\frac{d}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\tilde{K}_{\pm}(x,y)f(x)dx, \tag{9}$$

这里

$$K_{\pm}(x,y):=e^{\mp i\frac{\pi}{2}\Gamma_y}e^{-i<x,y>}, \tag{10}$$

和

$$\tilde{K}_{\pm}(x,y):=e^{\pm i\frac{\pi}{2}\Gamma_y}e^{i<x,y>}, \tag{11}$$

是相应的核函数,$\Gamma_y:=(\partial_y y - y\partial_y)/2 + d/2 = -\sum_{j<k} e_j e_k (x_j\partial_{x_k} - x_k\partial_{x_j})$被称为 Gamma 算子[12].

注意到上面的核函数关于变量 x,y 不是对称的,即,$K_-(x,y)\neq K_-(y,x)$[11]. 所以约定积分时都对核函数的第一个变量进行积分. 在本文中,只考虑核函数 $K_-(x,y):=e^{i\frac{\pi}{2}\Gamma_y}e^{-i<x,y>}$,其他的情形可以类似得到.

由文献[14],使用盖根堡(Gegenbauer)多项式 $C_k^\lambda(\omega)$和贝塞尔函数 $J_\alpha(t)$:

$$K_-(x,y) = A_\lambda + B_\lambda + (x\wedge y)C_\lambda,$$

其中

$$A_\lambda = 2^{\lambda-1}\Gamma(\lambda+1)\sum_{k=0}^{\infty}(i^d + (-1)^k)(|x||y|) - \lambda J_{k+\lambda}(|x||y|)C_k^\lambda(<\xi,\eta>), \tag{12}$$

$$B_\lambda = -2^{\lambda-1}\Gamma(\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}(i^d - (-1)^k)(|x||y|) - \lambda J_{k+\lambda}(|x||y|)C_k^\lambda(<\xi,\eta>), \tag{13}$$

$$C_\lambda = -(2\lambda)2^{\lambda-1}\Gamma(\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}(i^d + (-1)^k)(|x||y|) - \lambda - 1J_{k+\lambda}(|x||y|)C_{k-1}^{\lambda+1}(<\xi,\eta>), \tag{14}$$

这里 $\xi = x/|x|, \eta = y/|y|$和 $\lambda = (d-2)/2$.

注意到,当维数 d 是偶数时,A_λ,B_λ 和 C_λ 是实值的. 而当 $d=2$ 时,核函数可由下式给出

$$K_-(x,y) = e^{i\frac{\pi}{2}\Gamma_y}e^{-i<x,y>} = \cos(x_1y_2 - x_2y_1) + e_1e_2\sin(x_1y_2 - x_2y_1),$$

由于$(e_1e_2)^2 = -1$,上式中若用虚数单位 i 代替 e_1e_2,该核函数就相当于经典傅里叶变换中的核函数. 但在高维的空间中,情况将变得很复杂. 比如,在文献[14]中,作者证明了 $d>2$ 时,$K_-(x,z)k_-(y,z)\neq k_-(x+y,z)$. 进一步,在维数为偶数的情况下,核函数又可表示为贝塞尔函数的有限和的形式:

$$K_-(x,y) = e^{i\frac{\pi}{2}\Gamma_y}e^{-i<x,y>} =$$

$$(-1)\lambda + 1(\frac{\pi}{2})\frac{1}{2}(A_\lambda^*(s,t) + B_\lambda^*(s,t) + (x\wedge y)C_\lambda^*(s,t)),$$

这里 $s=<x,y>$ 和 $t=|x\wedge y|=\sqrt{|x|^2\ |y|^2-s^2}$,以及

$$A_\lambda^*=\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{\lambda+1}{2}-\frac{3}{4}\rfloor}s^{\lambda-1-2l}\frac{1}{2^l l!}\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-2l)}\tilde{J}_{2\lambda-2l-1}(t),$$

$$B_\lambda^*=-\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{\lambda+1}{2}-\frac{1}{2}\rfloor}s^{\lambda-2l}\frac{1}{2^l l!}\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-2l+1)}\tilde{J}_{2\lambda-2l-1}(t),$$

$$C_\lambda^*=-\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{\lambda+1}{2}-\frac{1}{2}\rfloor}s^{\lambda-2l}\frac{1}{2^l l!}\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-2l+1)}\tilde{J}_{2\lambda-2l+1}(t),$$

这里 $\tilde{J}_\alpha(t)=t^{-\alpha}J_\alpha(t)$.

上面偶数情形下的具体表达式使得文献[14]的作者去研究这个核函数的界,这就是下面这个引理.

引理 2.2　设 d 是偶数,对 $x,y\in\mathbb{R}^d$,有

$$|K_-(x,y)|=c\ (1+|x|)^\lambda\ (1+|y|)^\lambda.$$

3　单演函数的博克纳公式

在这一小节里,考虑单演函数的博克纳公式.

定义 3.1　设 $k\in\mathbb{N}$. 记

(i) M_k^+ 为 R^d 中最高次数为 k 的左单演齐次多项式空间. 该空间中任一元素记为 P_k,称为 k 次左内单演函数.

(ii) M_k^- 为 $R^d\setminus\{0\}$ 中最高次数为 $-(d+k-1)$ 的左单演齐次函数空间. 该空间中任一元素记为 Q_k,称为 k 次左外单演函数.

(iii) 空间 M_k^+ 和 M_k^- 定义为 M_k^+ 和 M_k^- 在单位球面 $\sum_n$ 上的限制,这些函数被称为球单演函数,或球面单演函数.

(iv) H_k 为 R^d 中球面调和函数空间.

因为在偶数维数情况下,核函数 $K_-(x,y)$ 都是有界的. 所以文献[14]给出了 CFT 的一些重要性质:

引理 3.2　假设 $M_k\in\mathrm{M}_k$ 和 $f(x)=f_0(|x|)$ 是 $S(\mathbb{R}^d;Cl_{0,d})$ 中的实值径向函数,此外,记 $\xi=x/|x|$,$\eta=y/|y|$,$r=|x|$ 和 $s=|y|$,则

$$F_-(f_0(r)M_k(x))=((-1)^k s^{-(k+\lambda)}\int_0^\infty r^{d+k-1}f_0(r)r^{-\lambda}J_{k+\lambda}(sr)dr)M_k(y).\tag{15}$$

由克里佛德代数知,对任一 $k\in\mathbb{N}$,有

$$H_k=M_k^+\oplus M_{k-1}^-\tag{16}$$

这里 $k=0$ 时,定义 $M_{-1}^-=\{0\}$. 这让我们可以考虑单演函数的博克纳公式. 需要下面函数空间的定义:

定义 3.3　定义

(i) $k\geq0$ 时,Ω^k 为形如 $P(x)f(r)$ 的有限线性复合函数,这里 $P\in\mathrm{M}_k$,f 是定义在$[0,+\infty)$上的函数,满足 $\int_0^\infty|f(r)|^2r^{d+2k-1}dr<\infty$;

(ii) $k>0$ 时,Ω^{-k} 为形如 $Q(x)g(r)$ 的有限线性复合函数,这里 $Q\in\mathrm{M}_{k-1}^-$,g 是定义在$[0,+\infty)$上的函数,满足 $\int_0^\infty|g(r)|^2r^{-(d+2k-3)}dr<\infty$.

使用文献[16]和[15]中类似的结论,可以得到 $L^2(\mathbb{R}^d;Cl_{0,d})$ 的如下直和分解定理:

定理 3.4　直和分解公式

$$L^2(\mathbb{R}^d)=\bigoplus_{n=-\infty}^{\infty}\Omega^k.$$

在下述意义下成立：

(i)每一个子空间 Ω^k 都是闭的；

(ii)Ω^k 是两两正交的；

(iii)$L^2(\mathbb{R}^d;Cl_{0,d})$ 中每个元素是空间 $\cup_{n=-\infty}^{\infty}\Omega^k$ 中有限线性复合的极限.

由文献[16]中 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 的直和分解公式和公式(16),这个定理易证.

在下面主要考虑 CFT 如何作用在每个子空间 Ω^k 上,$k\in\mathbb{Z}$,这里$\mathbb{Z}$ 表示整数集.

定理 3.5 每一个 Ω^k 在 CFT 下保持不变.准确地说,令 $f\in\Omega^k$,$k\in\mathbb{Z}$,和 $f(x)=R(x)h(r)$,这里如果 $k\geq 0$,则 $R(x)\in\mathrm{M}_k^+$;如果 $k<0$,则 $R(x)\in\mathrm{M}_{|k|-1}^-$.有

$$F_-f(x)=R(x)H(s),$$

并且

$$H(s)=(-1)^k s^{-\mathrm{sgn}(k)c_k}\int_0^{\infty}h(r)J_{c_k}(sr)r^{1+\mathrm{sgn}(k)c_k}dr \tag{17}$$

这里 $c_k=(d+2|k|-2)/2$,$k\in\mathbb{Z}$,$\mathrm{sgn}(k)$是符号函数,即当 $k>0$,$k<0$ 或 $k=0$ 取值分别为 $+1$,-1 或 0.

证明:当 $k\geq 0$ 时,因为 $R(x)\in\mathrm{M}_k^+$,由公式(15)可得

$F_-f(x)=R(x)H(s)$,

且

$$H(s)=(-1)^k s^{-(k+\frac{d}{2}-1)}\int_0^{\infty}r^{k+\frac{d}{2}}h(r)J_{k+\frac{d}{2}-1}(sr)dr. \tag{18}$$

当 $k<0$,因为 $R(x)\in\mathrm{M}_{|k|-1}^-$,这样 $R(x)$可以表示为下列形式：

$R(x)\in\dfrac{P(x)}{|x|d+2k-2}$,

且 $P(x)\in\mathrm{M}_k^+$.再次使用公式(15),有

$$F_-(R(x)h(r))=((-1)^k s^{-(k+\frac{d}{2}-1)}\int_0^{\infty}r^{-k-\frac{d}{2}+2}h(r)J_{k+\frac{d}{2}-1}(sr)dr)P(y).$$

这样,就得到

$$F_-f(x)=R(x)H(s)$$

且

$$H(s)=(-1)^k s^{k+\frac{d}{2}-1}\int_0^{\infty}r^{-k-\frac{d}{2}+2}h(r)J_{k+\frac{d}{2}-1}(sr)dr. \tag{19}$$

此外,若定义 $c_k=(d+2|k|-2)/2$,$k\in\mathbb{Z}$,并引入符号函数

$$\mathrm{sgn}(n)=\begin{cases}1,n>0\\0,n=0,\\-1,n<0.\end{cases}$$

公式(18)和(19)可以统一为一个公式,即公式(17),这样证明完成.

参考文献

[1] ABREU L. Sampling and interpolation in Bargmann – Fock spaces of polyanalytic functions[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2010, 29(3):287 – 302.

[2] BALAN R. Density and redundancy of the noncoherent Weyl – Heisenberg superframes[C]. The functional and harmonic analysis of wavelets and frames (San Antonio, TX, 1999), Contemporary Mathematics, 247:29 – 41.

[3] BALAN R. Multiplexing of signals using superframes, SPIE Wavelets Applications[C]. Signal and Image Processing VIII, 2000, 4119:118 – 129.

[4] GROCHENIG K, LYUBARSKII Y. Gabor (super) frames with Hermite functions[J]. Mathematische Annalen, 2009, 345 (2):267 – 286.

[5] BRACKX F, DELANGHE R, SOMMEN F. Clifford analysis[M]. Bos-

ton, London, Melbourne: Pitman Advanced Publishing Company, 1982.

[6] DELANGHE R, SOMMEN F, SOUCEK V. Clifford algebra and spinor valued functions[M]. A function theory for Dirac operator:1992.

[7] HOWE R , TAN E C. Nonabelian Harmonic Analysis[M]. New York: Universitext, Springer, 1992.

[8] BAHRI M, HIZTER E. Clifford Fourier transformation and uncertainty principle for the Clifford geometric algebra $Cl_{3,0}$[J]. Advances in Applied Clifford Algebras, 2006,16 (1), 41 -61.

[9] BRACKX F, DE SCHEPPER N, SOMMEN F. The two - dimensional Cliffordâ AS Fourier transform[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2006, 26 (1 -2): 5 -18.

[10] BRACKX F, DE SCHEPPER N, SOMMEN F. The Fourier transform in Clifford analysis[J]. Advances in Imaging and Electron Physics, 2009,156:55 -201.

[11] HITZER E, BAHRI M. Clifford Fourier transform on multivector fields and uncertainty principles for dimensions $n=2(\mathrm{mod}4)$ and $n=3(\mathrm{mod}4)$[J]. Advances in Applied Clifford Algebras, 2008, 18 (3 -4):715 -736.

[12] KOU K I, QIAN T. The Paley - Wiener Theorem in $\mathbb{R}^n$ with the Clifford analysis setting[J]. Journal of Functional Analysis, 2002, 189 (1):227 -241.

[13] BRACKX F, DE SCHEPPER N, SOMMEN F. The Clifford - Fourier transform[J]. Journal of Fourier Analysis and Applications, 2005, 11(6):669 -681.

[14] DE BIE H, XU Y. On the Clifford - Fourier transform[J]. International Mathematics Research Notices , 2011(22): 5123 -5163.

[15] FEI M G, QIAN T. Direct sum decomposition of $L^2(\mathbb{R}_1^n)$ into subspaces invariant under Fourier transformation[J]. Journal of Fourier Analysis and Applications, 2006, 12 (2):145 -155.

[16] STEIN E M, WEISS G. Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces[M]. Princeton:Princeton University Press, 1971.

(责任编辑:付强,张阳,李建忠,罗敏;英文编辑:周序林)