2019 年 7 月
第 45 卷第 4 期

西南民族大学学报(自然科学版)
Journal of Southwest Minzu University (Natural Science Edition)

July. 2019
Vol. 45 No. 4

doi:10. 11920/xnmdzk. 2019. 04. 012

一类交叉扩散系统稳态解的存在性和多重性

曾纯一

(西南民族大学预科教育学院,四川　成都　610041)

摘　要:考虑的是一类带交叉扩散的干旱地区沙漠化生态系统模型,主要研究了当资源项与降水的正反馈系数相等时的边界平衡点附近的空间非齐次稳态解性质,其中通过运用 Lyapunov – Schmidt 约化方法和隐函数存在定理,得到了空间非齐次稳态解的存在性与多重性,并给出了在参数 λ 不同的取值范围内空间非齐次稳态解的具体表示式.

关键词:稳态解; 交叉扩散;Lyapunov – Schmidt 约化

中图分类号:O175　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:2095-4271(2019)04-0411-04

Existence and diversity of steady state solution in a cross – diffusion model

ZENG Chun – yi

(School of Preparatory Education, Southwest Minzu University, Chengdu 610041, P. R. C.)

Abstract:This paper focused on an ecosystem model in a desertified regions of absence surface water with cross – diffusion, and studied the property of the spatially nonhomogeneous steady state solutions with the boundary equilibrium when the source term is equal to the parameter of positive feedback. By means of Lyapunov – Schmidt reduction and the implicit function theorem, the existence and diversity of the spatially nonhomogeneous steady state solutions were derived. Meanwhile we analyzed the expression of the spatially nonhomogeneous steady state solutions for the different range of the bifurcation parameterλ.

Key words:steady state solution; cross – diffusion;Lyapunov – Schmidt reduction

反应扩散现象与人们的生活密切相关,它能描述客观事物的主要特征及发展规律,相对于常微分方程所描述的有限维动力系统而言,反应扩散方程所刻画的动力系统的动力学性质更为复杂,特别是带有交叉扩散的各类生物、生态系统模型,由于从非线性的角度,交叉扩散系统是属于拟线性抛物系统,关于这类系统的非平凡解的存在性问题已有一些结果,但很少有人讨论具有自扩散和交叉扩散的生态模型的分岔现象,近年来带有交叉扩散的各类生物、生态模型[1-6]备受关注,主要研究了非常数稳态解的不存在性和存在性,后来也有不少作者研究了交叉扩散系统[7-9]和带时滞的反应扩散方程系统的动力学行为[10-14],扩散一般分为自扩散、自由扩散和交叉扩散,考虑到交叉扩散对生物、生态系统的平衡态的影响非常有必要,而且也是十分有意思的一件事情,接下来,将利用一种新方法来研究如下一类具有交叉扩散影响的沙漠化生态模型:

$$\begin{cases} u_t = d\Delta u - d\beta\Delta v + \mathrm{P} - u - u^2 v + \rho uv, & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t = \Delta v - v^2 - \alpha v + r\dfrac{uv}{1+\sigma u}, & x \in \Omega, t > 0. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $d,\beta,\mathrm{P},\alpha,r,\sigma$ 和 ρ 均为正常数,具体含义见参考文献[1],系统(1)显然有稳态解 $(u,v) = (\mathrm{P},0)$,接下

收稿日期:2019-01-16
作者简介:曾纯一(1980),女,汉族,四川自贡人,讲师,研究方向:函数论及动力系统
基金项目:中央高校基本科研业务费专项基金(2017NZYQN04)

来在 $P=\rho$ 的前提下,把$(P,0)$平移到$(0,0)$,然后将主要运用文献[15]中的 Lyapunov – Schmidt 约化方法来研究在 Dirichlet 边界条件下的新系统在$(0,0)$点附近的空间非齐次稳态解的存在性、多重性及解的具体表示式.

$$\begin{cases} d\Delta u - d\beta\Delta v - u - u^2 v - \rho uv = 0, & x\in\Omega, t>0, \\ \Delta v - v^2 - \alpha v + rv\dfrac{u+P}{1+\sigma(u+P)} = 0, & x\in\Omega, t>0, \\ u = v = 0, & x\in\partial\Omega, t>0. \end{cases} \tag{2}$$

1 预备知识

为了方便,本文中总假设 $\lambda_i(i\in N)$为下面特征值问题的单重特征根.

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda u(x), & x\in\Omega, \\ u(x) = 0, & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

其中 φ_n 是特征值 λ_n 所对应的特征向量,且$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$为定义在 Ω 上的可积函数空间 $L^2(\overline{\Omega})$的完备的标准正交系,满足$\int_\Omega \varphi_n^2(x)dx=1$ $(n\in\mathrm{N}, x\in\Omega)$且 $\varphi_1(x)>0$. 记 $\varphi_* = \varphi_1$,为了方便,本文所讨论的空间 $L^2(\Omega)$,$H^k(\Omega)$,$H_0^k(\Omega)$为标准实值 Sobolev 空间,记 $\mathrm{X}=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$,$\mathrm{Y}=L^2(\Omega)$,以 $H_0^1(\Omega)=\{u\in H^1(\Omega)\,|u(x)=0$ 对所有的 $x\in\partial\Omega\}$. 对任意的 X 和 Y 的子空间 Z,定义 Z 的复值空间 $Z_C=:Z\oplus \mathrm{i}Z=\{x+\mathrm{i}y\,|x,y\in Z\}$.

对线性算子 $L:Z_1\to Z_2$,记 L 的定义域为 $Dom(L)$,记 L 的值域为 $Range(L)$.

接下来,首先研究系统(2)的空间非齐次稳态解的存在性,系统(2)的稳态解满足如下的边值问题:

$$\begin{cases} d\Delta u - d\beta\Delta v - u - u^2 v - \rho uv = 0, & x\in\Omega, \\ \Delta v - v^2 - \alpha v + rvg(u) = 0, & x\in\Omega, \\ u = v = 0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

其中 $g(u)=\dfrac{u+P}{1+\sigma(u+P)}$,为了寻找系统(4)的非常数解,当 $\rho>\dfrac{\alpha}{r-\alpha\sigma}>0$ 时,记 $\lambda=g(0)r-\alpha$ 为分岔参数,并且定义算子 $F:\mathrm{X}^2\times\mathrm{R}\to\mathrm{Y}^2$ 如下

$$F(U,\lambda)=\begin{bmatrix} F_1(U,\lambda) \\ F_2(U,\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\Delta u - d\beta\Delta v - u - u^2 v - \rho uv \\ \Delta v - v^2 - \alpha v + rg(u)v \end{bmatrix}. \tag{5}$$

其中 $U=(u,v)^T\in\mathrm{X}^2$ 和 $\lambda\in\mathrm{R}$. 接下来希望找到 $U\in\mathrm{X}^2$ 和参数 $\lambda\in\mathrm{R}$ 使得方程 $F(U,\lambda)=0$. 易知,对每一个固定参数 $\lambda\in\mathrm{R}$,$F(U,\lambda)=0$ 都有一个平凡解 $U_0=(0,0)^T$,即 $F(U_0,\lambda)=0$ 对任意的 λ 结论均成立. 为了进一步探讨 U_0 附近系统(4)的非常数解的存在性,要先计算 F 关于 U 在(U_0,λ)处 Fréchet 导数,即

$$L_\lambda=\begin{bmatrix} d\Delta-1 & -d\beta\Delta \\ 0 & \Delta+\lambda \end{bmatrix}.$$

接下来需要计算算子 L_λ 的核,也即是说要解下面的方程$\begin{cases} d\Delta u - d\beta\Delta v - u = 0 \\ \Delta v + \lambda v = 0 \end{cases}$,于是有以下结论.

引理 1 对每一个固定的 λ,算子 L_{λ_*} 的核为 $\mathrm{K}=span\{q\}$,其中 $q=(a\varphi_*,\varphi_*)^T$ 且 $a=\dfrac{d\beta\lambda_*}{d\lambda_*+1}$.

在复 Hilbert 空间 Y_C^2 中,使用标准内积$\langle U,V\rangle=\int_\Omega \bar{U}^T(x)V(x)dx$ 以及给出 L_λ 的伴随算子为 L_λ^*,也即是有$\langle U,L_\lambda V\rangle=\langle L_\lambda^* U,V\rangle$,其中 $U,V\in\mathrm{X}^2$,容易得出

$$L_\lambda^*=\begin{bmatrix} d\Delta-1 & 0 \\ -d\beta\Delta & \Delta+\lambda \end{bmatrix}$$

引理 2 对每一个固定的 λ,算子 $L_{\lambda_*}^*$ 的核为 $\mathrm{K}^*=span\{p\}$,其中 $p=(0,\varphi_*)^T$.

2 主要结论

本文的主要目的是找到非线性方程 $F(U,\lambda)=0$ 的非零解，并且满足当参数 λ 趋于 λ_* 时有 U 趋于 U_0. 为了运用 Lyapunov – Schmidt 约化方法得到一个有限维的分岔问题. 首先对空间进行分解：

$$\mathrm{X}^2=\mathrm{K}\oplus\mathrm{X}_1^2,\qquad \mathrm{Y}^2=RanL_{\lambda_*}\oplus\mathrm{Y}_1^2,$$

其中 $\mathrm{X}_1^2=\{y\in\mathrm{X}^2\mid\langle\varphi,y\rangle=0\ \text{对所有}\ \varphi\in\mathrm{K}\}$，$\mathrm{Y}_1^2=\{y\in\mathrm{Y}^2\mid\langle\varphi,y\rangle=0\ \text{对所有}\ \varphi\in RanL_{\lambda_*}\}$，对每一个 $V\in\mathrm{Y}_1^2$，和 $U\in Dom(L_{\lambda_*})$，有 $\langle L_{\lambda_*}U,V\rangle=\langle U,L_{\lambda_*}^*V\rangle$，这意味着 $\mathrm{Y}_1^2\subset\mathrm{Ker}L_{\lambda_*}^*$. 显然，算子 $L_{\lambda_*}:\mathrm{X}^2\to\mathrm{Y}^2$ 是一个指标为零的 Fredholm 算子. $L_{\lambda_*}|_{\mathrm{X}_1^2}:\mathrm{X}_1^2\to RanL_{\lambda_*}$ 是一个具有有界逆的可逆算子. 记 P 和 $I-P$ 分别表示从 Y^2 到 $RanL_{\lambda_*}$ 和 Y_1^2 的映射. 因此，$F(U,\lambda)=0$ 等价于下述系统

$$PF(U,\lambda)=0,\qquad (I-P)F(U,\lambda)=0.\tag{6}$$

对于每个 $U\in\mathrm{X}^2$，有唯一的分解 $U=kq+W$，其中，$k\in\mathrm{R}$ 且 $W\in\mathrm{X}_1^2$，记 $\Im(k,W,\lambda)=PF(kq+W,\lambda)$，即 $\Im(k,W,\lambda)\triangleq PF(kq+W,\lambda)=0$，显然有，$\Im(0,0,\lambda)=0$ 和 $\Im_W(0,0,\lambda_*)=PL_{\lambda_*}=L_{\lambda_*}$. 运用隐函数存在定理，显然可以获得一个连续可微映射 $W:N\times\Theta\to\mathrm{X}_1^2$ 使得 $W(0,\lambda_*)=0$ 且 $PF(kq+W(k,\lambda),\lambda)\equiv0$，其中，$W(k,\lambda)=(W_1(k,\lambda),W_2(k,\lambda))^T$，所有的 $(k,\lambda)\in N\times\Theta$，$N$ 是向量 0 在 R^2 中的一个开邻域，Θ 是 λ_* 在 R 中的一个开邻域. 令 $\Re(\zeta,\xi)=\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}F(t\zeta+s\xi)|_{t=0,s=0}$，其中 $\zeta=(\zeta_1,\zeta_2)^T$ 和 $\xi=(\xi_1,\xi_2)^T\in\mathrm{K}$，由计算得，

$$\Re(\zeta,\xi)=\begin{bmatrix}-\rho\xi_1\zeta_2-\rho\zeta_1\xi_2\\-2\zeta_2\xi_2+rg'(0)\zeta_1\xi_2+rg'(0)\xi_1\zeta_2\end{bmatrix}.$$

由(6)的第一个方程知：$P\Re(q,q)+L_{\lambda_*}W_{kk}=0$，因此 $W_{kk}=-L_{\lambda_*}^{-1}P\Re(q,q)$，其中，$W_{kk}=(W_{1,kk},W_{2,kk})^T$.

将 $W=W(k,\lambda)$ 代入系统(6)的第二个方程得到

$$\mathrm{J}(k,\lambda)\triangleq(I-P)F(kq+W(k,\lambda),\lambda)=0.\tag{7}$$

这样就已将原方程的稳态解的计算问题转化为了计算算子 $J:N\times\Theta\to\mathrm{Y}_1^2$ 的零点问题. 其中，$\mathrm{J}(0,\lambda)=0$ 和 $\mathrm{J}_k(0,\lambda_*)=0$. 根据 Lyapunov – Schmidt 约化可知，必定存在 $(0,0,\lambda_*)\in\mathrm{R}^2\times\mathrm{R}$ 的一个开邻域 $N\times\Theta$，使得 $\mathrm{J}(k,\lambda)=0$ 在 $N\times\Theta$ 中的每一个解都与 $F(U,\lambda)=0$ 的解一一对应.

于是，接下来只需解方程 $\mathrm{J}(k,\lambda)=0$. 将方程(7)与 $p=(0,\varphi_*)^T$ 做内积可以得到

$$G(k,\lambda)\triangleq\int_\Omega\varphi_*(x)F_2(kq(x)+W(k,\lambda)(x),\lambda)dx=0.\tag{8}$$

显然，$G(0,\lambda)=0$，经计算易得算子 $G:\mathrm{R}^2\to\mathrm{R}$ 满足如下的表达式

$$G(k,\lambda)=k[\lambda-\lambda_*+Ak+Bk^2+o(k^2)],\tag{9}$$

其中 $A=[rag'(0)-1]\int_\Omega\varphi_*^3(x)dx+\frac{1}{2}rg(0)\int_\Omega\varphi_*(x)W_{2,kk}(x)dx$,

$$B=\frac{rg'(0)}{2}\int_\Omega\varphi_*^2(x)W_{1,kk}(x)dx+ra^2g''(0)\int_\Omega\varphi_*^4(x)dx+[\frac{arg'(0)}{2}-1]\int_\Omega\varphi_*^2(x)W_{2,kk}(x)dx.$$

下面将分两种情形得到系统(4)的空间非齐次稳态解存在性和多重性的结论. 首先先考虑 $A\neq0$ 的情形，运用隐函数存在定理可知存在一常数 $\delta>0$ 和一个连续可微映射 $k:(\lambda_*-\delta,\lambda_*+\delta)\to\mathrm{R}$，使得 $G(k_\lambda,\lambda)\equiv0$. 即有

$$k_\lambda=\frac{\lambda_*-\lambda}{A}+o(|\lambda-\lambda_*|).\tag{10}$$

于是有以下结论：

定理 1　如果 $A\neq0$，那么存在常数 $\delta>0$ 和由 $(\lambda_*-\delta,\lambda_*+\delta)$ 到 R 的连续可微映射 $\lambda\to k_\lambda$，使得系统(4)具有一个非平凡解 $U_\lambda=k_\lambda q+W(k_\lambda,\lambda)$，而且由 $\lim_{\lambda\to\lambda_*}k_\lambda=0$ 和 $W(0,\lambda_*)=0$，该非平凡解满足 $\lim_{\lambda\to\lambda_*}U_\lambda=0$.

注解 1 注意到 λ_* 是一维特征值问题(3)的主特征值,它在 Ω 上对应的特征函数为 $\varphi_* > 0$,于是当 $(\lambda_* - \lambda)A > 0$ ($(\lambda_* - \lambda)A < 0$)时,由定理 1 得到的空间非齐次稳态解 U_λ 是正的(负的). 由于在生物生态学中,负的稳态解没有意义,所以往往只研究正的稳态解.

接下来,考查当 $A = 0$ 且 $B \neq 0$ 时的情形,于是 $G(\cdot,\lambda)$ 的零解在 $\lambda = \lambda_*$ 附近经历了鞍结点分岔. 更具体的说,即如果 $B < 0$ ($B > 0$),那么当 $\lambda > \lambda_*$ ($\lambda < \lambda_*$)时, $G(\cdot,\lambda)$ 在原点附近仅有两个非平凡零点 $k = k_\lambda^\pm$;当 $\lambda \leq \lambda_*$ ($\lambda \geq \lambda_*$)时 $G(\cdot,\lambda)$ 在原点附近只有一个平凡零点 $k = 0$. 于是,可以得到以下结论:

定理 2 如果 $A = 0$ 且 $B < 0$ ($B > 0$),那么存在常数 $\lambda^* > \lambda_*$ ($\lambda^* < \lambda_*$)和由 (λ_*, λ^*) 到 R(由 (λ^*, λ_*) 到 R)的两个连续可微映射 $\lambda \to k_\lambda^\pm$,使得系统(4)具有两个非平凡解 $U_\lambda^\pm = k_\lambda^\pm q + W(k_\lambda^\pm, \lambda)$,并且非平凡解满足 $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_*} U_\lambda^\pm = 0$.

注解 2 注意到 λ_* 是一维特征值问题(3)的主特征值,它在 Ω 上对应的特征函数为 $\varphi_* > 0$,因此定理 2 中得到的两个空间非齐次稳态解 $U_\lambda^\pm$ 一个是正的而另一个是负的. 在生物生态学中,只对其中正的那个稳态解感兴趣.

参考文献

[1] MERON E, GILAD E, HARDENBERG J V, et al. Vegetation patterns along a rainfall gradient[J]. Chaos Solitons and Fractals, 2004, 19: 367 – 376.

[2] HARDENBERG J V , MERON E, SHACHAK M , et al . Diversity of vegetation patterns and desertification [J]. Physical Review Letters, 2001, 87: 198101.

[3] SIERO E , DOELMAN A, EPPINGA M B, et al. Striped pattern selection by advective reaction – diffusion systems: resilience of banded vegetation on slopes [J]. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science ,2015,25: 036411.

[4] SACO P M , WILLGOOSE G R, HANCOCK G R . Eco – geomorphology of banded vegetation patterns in arid and semi – arid regions[J]. Hydrology and Earth System Science , 2007, 11: 1717 – 1730 .

[5] SHERRATT J A. An analysis of vegetation stripe formation in semi – arid landscapes[J]. Journal of Mathematical Biology , 2005, 51:183 – 197.

[6] DEBLAUWE V , COUTERON P, LEJEUNE O , et al . Environmental modulation of self – organized periodic vegetation patterns in Sudan [J]. Ecography ,2011, 34: 990 – 1001 .

[7] IIDA M, MIMURA M, NINOMIYA H. Diffusion, cross – diffusion and competitive interaction [J]. Journal of Mathematical Biology ,2006, 53(4):617 – 641.

[8] WANG MINGXIN. Stationary patterns caused by cross – diffusion for a three – species preypredator model [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2006, 52(5):707 – 720.

[9] WU YAPING. The instability of spiky steady states for a competing species model with cross diffusion [J]. Journal of Differential Equations ,2005, 213(2):289 – 340.

[10] HALE J K, VERDUYN LUNEL S M. Introduction to Functional Differential Equations[M]. New York :Springer – Verlag,, 1993.

[11] HALE J K. Functional Differential Equations[M]. New York: Springer – Verlag , 1971.

[12] WU JIANHONG. Theory and Applications of Partial Functional – Differential Equations[M]. New York :Springer – Verlag, 1996.

[13] WU JIANHONG,ZOU XINGFU. Traveling wave fronts of reaction – diffusion systems with delay[J]. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2001, 13(3):651 – 687.

[14] GUO SHANGJIANG. Stability and bifurcation in a reaction – diffusion model with nonlocal delay effect[J]. Journal of Differential Equations 2015, 259 :1409 – 1448.

[15] GUO SHANGJIANG, WU JIANHONG. Bifurcation theory of functional differential equations [M]. New York :Springer – Verlag, 2013.

(责任编辑:付强,张阳,李建忠,罗敏;英文编辑:周序林)