2018 年 1 月
第 44 卷第 1 期
西南民族大学学报(自然科学版)
Journal of Southwest Minzu University (Natural Science Edition)
Jan. 2018
Vol. 44 No. 1

doi:10.11920/xnmdzk.2018.01.013

具有时滞的双向联想记忆神经网络的稳定性分析

杨金祥

(西南民族大学计算机科学与技术学院,四川 成都 610041)

摘 要:研究一类具有时滞的变系数双向联想记忆神经网络(BAM)的稳定性问题.由于时滞变系数双向联想记忆神经网络的平衡点不一定存在,分平衡点存在和不存在两种情况进行研究.在 BAM 神经网络系统存在平衡点时,通过构造 Lyapunov 函数,结合不等式分析技巧,给出了系统指数稳定的充分条件;在 BAM 神经网络系统不存在平衡点时,利用数学归纳法给出了系统的吸引域.

关键词:双向联想记忆神经网络;指数稳定;吸引域;Lyapunov 函数

中图分类号:O175.13 **文献标志码**:A **文章编号**:2095-4271(2018)01-0083-04

Stability analysis of delayed bi-directional associative memory networks

YANG Jin-xiang

(School of Computer Science and Technology, Southwest Minzu University, Chengdu 610041, P. R. C.)

Abstract: The delayed bi-directional associative memory networks with variable coefficients is studied, and a new sufficient condition is presented guaranteeing the exponential stability of the equilibrium when it exists; In the situation where the system does not have equilibrium, the condition for attractivity is given to work out the attraction set by constructing a Lyapunov function.

Key words: bi-directional associative memory network; exponential stability; set of attraction; Lyapunov function

1982 年,Hopfield 提出了可用作联想存储器的 Hopfield 神经网络模型,该网络模型可以模拟人类的记忆. 1987 年,在 Hopfield 神经网络单层单向联想记忆的基础上,Kosko 提出了双层双向联想记忆的神经网络模型(BAM). BAM 神经网络在模式分类和模式识别、人工智能等方面有很更广泛的应用,有力地推动了神经网络理论的发展[1-4]. 神经网络的稳定性与权值有关,通过调整权值,可以使神经网络收敛于平衡点. BAM 神经网络的稳定性已引起了广泛的注意,并得到了一系列的研究成果[5-13]. 本文考虑如下的具有时滞的 BAM 神经网络:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i(t)}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji}(t) f_j(y_j(t-\tau_{ji})) + I_i(t),\ i = 1,2,\cdots,n, \\ \dfrac{dy_j(t)}{dt} = -d_j y_j(t) + \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ij}(t) g_i(x_i(t-\zeta_{ij})) + I_j'(t),\ \mathrm{j} = 1,2,\cdots,m. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x_i(t)$,$y_j(t)$ 为状态变量,$c_i>0$,$d_j>0$ 为常数,τ_{ji},ζ_{ij} 是时滞,$a_{ji}(t)$,$b_{ij}(t)$ 是连接权,$I_i(t)$,$I_j'(t)$ 是外部输入,f_j 和 g_i 是激活函数,且满足:

$$\begin{cases} |f_j(x) - f_j(y)| \le L_j' |x-y|,\ \mathrm{j} = 1,2,\cdots,m, \\ |g_i(x) - g_i(y)| \le L_i |x-y|,\ i = 1,2,\cdots,n. \end{cases} \tag{2}$$

收稿日期:2017-11-13
作者简介:杨金祥(1973-),男,副教授,研究方向:动力系统
基金项目:国家自然科学基金(61673016,61703353);中央高校基本科研业务费专项基金项目青年教师基金项目(12NZYQN17);四川省教育厅创新团队(15TD0050);四川省科技厅青年科技创新团队(2017TD0028)

系统(1)的初始条件:

$$\begin{cases} x_i(t) = \varphi_i,\ t \in [-\tau, 0],\ i = 1,2,\cdots,n, \\ y_j(t) = \varphi_j,\ t \in [-\zeta, 0],\ \mathrm{j} = 1,2,\cdots,m. \end{cases}$$

其中,$\tau = \max\limits_{i,j} \tau_{ji}, \zeta = \max\limits_{i,j} \zeta_{ij}$.

1 准备

取 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)^T$ 和 $y^* = (y_1^*, y_2^*, \cdots, y_m^*)^T$ 为常向量,则

$$\begin{cases} \dfrac{d(x_i(t) - x_i^*)}{dt} = -c_i(x_i(t) - x_i^*) + \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji}(t)(f_j(y_j(t - \tau_{ji})) - f_j(y_j^*)) + J_i(t),\ i = 1,2,\cdots,n, \\ \dfrac{d(y_j(t) - y_j^*)}{dt} = -d_j(y_j(t) - y_j^*) + \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ij}(t)(g_i(x_i(t - \zeta_{ij})) - g_i(x_i^*)) + J_j'(t),\ \mathrm{j} = 1,2,\cdots,m. \end{cases} \tag{3}$$

其中,$J_i(t) = -c_i x_i^* + \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji}(t) f_j(y_j^*) + I_i(t), J_j'(t) = -d_j y_j^* + \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ij}(t) g_i(x_i^*) + I_j'(t)$.

若 x^*, y^* 是系统(1)的平衡点,则系统(1)改写为:

$$\begin{cases} \dfrac{d(x_i(t) - x_i^*)}{dt} = -c_i(x_i(t) - x_i^*) + \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji}(t)(f_j(y_j(t - \tau_{ji})) - f_j(y_j^*)),\ i = 1,2,\cdots,n, \\ \dfrac{d(y_j(t) - y_j^*)}{dt} = -d_j(y_j(t) - y_j^*) + \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ij}(t)(g_i(x_i(t - \zeta_{ij})) - g_i(x_i^*)),\ \mathrm{j} = 1,2,\cdots,m. \end{cases} \tag{4}$$

2 主要结论

定理 1 若系统(1)存在平衡点,且存在常数 $\varepsilon_{ji}, \xi_{ij} > 0, p, q > 1, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1, \lambda_i, \lambda_j' > 0, i = 1,2,\cdots, n, j = 1,2,\cdots,m$ 使得

$$\begin{aligned} &1)\ -p\lambda_i c_i + \sum_{j=1}^{m} (\lambda_i L_j' |a_{ji}| \frac{p}{q} \varepsilon_{ji}^q + \lambda_j' L_i |b_{ij}| \xi_{ij}^{-p}) < 0, \\ &2)\ -p\lambda_j' d_j + \sum_{i=1}^{n} (\lambda_j' L_i |b_{ij}| \frac{p}{q} \xi_{ij}^q + \lambda_i L_j' |a_{ji}| \varepsilon_{ji}^{-p}) < 0, \end{aligned} \tag{5}$$

其中,$|a_{ji}| = \sup\limits_{-\tau_{ji} \le t < +\infty} |a_{ji}(t)|, |b_{ij}| = \sup\limits_{-\zeta_{ij} \le t < +\infty} |b_{ij}(t)|$.

则系统(1)是全局指数稳定的.

证明 由条件(5),存在 η,使得

$$\lambda_i(\eta - pc_i) + \sum_{j=1}^{m} (\lambda_i L_j' |a_{ji}| \frac{p}{q} \varepsilon_{ji}^q + \lambda_j' L_i |b_{ij}| \xi_{ij}^{-p} e^{\eta \zeta_{ij}}) \le 0,$$

$$\lambda_j'(\eta - pd_j) + \sum_{i=1}^{n} (\lambda_j' L_i |b_{ij}| \frac{p}{q} \xi_{ij}^q + \lambda_i L_j' |a_{ji}| \varepsilon_{ji}^{-p} e^{\eta \tau_{ji}}) \le 0,$$

构造 Lyapunov 函数

$$V(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i(t) - x_i^*|^p e^{\eta t} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i L_j' |a_{ji}| \varepsilon_{ji}^{-p} \int_{t-\tau_{ji}}^{t} |y_j(s) - y_j^*|^p e^{\eta(s+\tau_{ji})} ds +$$

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j' |y_j(t) - y_j^*|^p e^{\eta t} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j' L_i |b_{ij}| \xi_{ij}^{-p} \int_{t-\zeta_{ij}}^{t} |x_i(s) - x_i^*|^p e^{\eta(s+\zeta_{ij})} ds.$$

沿系统(4)的解求导,有

$$D^+V \le \sum_{i=1}^{n}\Big[\lambda_i(\eta - pc_i) + \sum_{j=1}^{m}\big(\lambda_i L_j^{'}|a_{ji}|\frac{p}{q}\varepsilon_{ji}^{q} + \lambda_j^{'}L_i|b_{ij}|\xi_{ij}^{-p}e^{\eta\zeta_{ij}}\big)\Big]|x_i(t) - x_i^*|^p e^{\eta t} +$$

$$\sum_{j=1}^{m}\Big[\lambda_j^{'}(\eta - pd_j) + \sum_{i=1}^{n}\big(\lambda_j^{'}L_i|b_{ij}|\frac{p}{q}\xi_{ij}^{q} + \lambda_i L_j^{'}|a_{ji}|\varepsilon_{ji}^{-p}e^{\eta\tau_{ji}}\big)\Big]|y_j(t) - y_j^*|^p e^{\eta t} \le 0 .$$

于是

$$\begin{cases}|x_i(t) - x_i^*| = o(e^{-\frac{\eta}{p}t}),\ i = 1,2,\cdots,n,\\ |y_j(t) - y_j^*| = o(e^{-\frac{\eta}{p}t}),\ i = 1,2,\cdots,m.\end{cases} \tag{6}$$

因此,系统(1)是全局指数稳定的.

定理 2 系统(1)不存在平衡点,且存在常数 $\delta_i > 0$, $\delta_j^{'} > 0$, $h > 0$,使得

1) $c_i - 2\sum_{j=1}^{m}|a_{ji}|L_j^{'} \ge \delta_i, d_j - 2\sum_{i=1}^{n}|b_{ij}|L_i \ge \delta_j^{'}$,

2) $|J_i(t)| < (c_i - \sum_{j=1}^{m}|a_{ji}|L_j^{'})h, |J_j^{'}| < (d_i - \sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|L_i)h$, (7)

则集合 $[x_1^* - h, x_1^* + h] \times [x_2^* - h, x_2^* + h] \times \cdots \times [x_n^* - h, x_n^* + h]$ 是系统(1)的吸引域.

证明 首先用数学归纳法证明: $\forall \varepsilon > 0, \forall B > h, M = \min\{k: h + k\varepsilon \ge B\}$, $\exists\ t_k\ (k = 0,1,\cdots,M)$, 当 $\forall t \ge t_k$, $\|\varphi - x^*\| < B, \|\varphi - y^*\| < B$ 有

$$\begin{cases}|x_i(t) - x_i^*| < h + (M - k)\varepsilon,\ i = 1,2,\cdots,n,\\ |y_j(t) - y_j^*| < h + (M - k)\varepsilon,\ j = 1,2,\cdots,m.\end{cases} \tag{8}$$

第一步证明: $\forall B > h$, $\forall\ t_0 \ge 0$, $\|\varphi - x^*\| < B, \|\varphi - y^*\| < B$,当 $\forall t \ge t_0$ 时,有

$$\begin{cases}|x_i(t) - x_i^*| < B,\ i = 1,2,\cdots,n,\\ |y_j(t) - y_j^*| < B,\ \mathrm{j} = 1,2,\cdots,m.\end{cases} \tag{9}$$

否则,存在 $\bar{i}, t_1 > 0$,使得

$$|x_{\bar{i}}(t) - x_{\bar{i}}^*| = \begin{cases}< B,\ -\infty < t < t_1\\ = B,\ t = t_1\end{cases},$$

$$|x_i(t) - x_i^*| \le B,\ -\infty < t \le t_1,\ i \ne \bar{i},\ i = 1,2,\cdots,n\ ,$$

$$|y_j(t) - y_j^*| \le B,\ -\infty < t \le t_1, j = 1,2,\cdots,m\ .$$

于是 $D^+|x_{\bar{i}}(t_1) - x_{\bar{i}}^*| \ge 0.$ (10)

又
$$D^+|x_{\bar{i}}(t_1) - x_{\bar{i}}^*| \le -(c_{\bar{i}} - \sum_{j=1}^{m}|a_{j\bar{i}}|L_j^{'})(B - h) < 0\ , \tag{11}$$

矛盾, 这就证明(9)成立. 于是当 $k = 0$ 时(8)成立.

第二步假设 $k\ (0 \le k < M)$ 时(8)成立,证明 $k + 1$ 时(8)亦成立.

下证 $\exists\ t_{k+1} > t_k$,当 $t = t_{k+1}$ 时(8)成立. 否则, $\exists\ \tilde{i}$,当 $\forall\ t > t_k$ 时,有

$$|x_{\tilde{i}}(t) - x_{\tilde{i}}^*| \ge h + (M - k - 1)\varepsilon, \tag{12}$$

$$|y_j(t) - y_j^*| < h + (M - k)\varepsilon,\ \mathrm{j} = 1,2,\cdots,m\ .$$

于是 $\forall\ t > t_k$, $\forall\ t > t_k, |y_j(t) - y_j^*| \le |x_{\tilde{i}}(t) - x_{\tilde{i}}^*| + \varepsilon$, $\mathrm{j} = 1,2,\cdots,m$. (13)

因此 $\forall\ t > t_k + \tau$,有 $D^+|x_{\tilde{i}}(t) - x_{\tilde{i}}^*| \le -\delta_i\varepsilon$.

$$|x_{\tilde{i}}(t) - x_{\tilde{i}}^*| \le |x_{\tilde{i}}(t_k + \tau) - x_{\tilde{i}}^*| - \delta_i\varepsilon(t - t_k - \tau)\ ,$$

$$|x_{\tilde{i}}(t) - x_{\tilde{i}}^{*}| \rightarrow -\infty (t \rightarrow \infty),$$

矛盾,于是 $t = t_{k+1}$ 时(8)成立.

进一步,可以证明: $t \geq t_{k+1}$ 时(8)成立. 否则,存在 $\tilde{i}, t^{*} \geq t_{k+1}$,使得

$$|x_{\tilde{i}}(t^{*}) - x_{\tilde{i}}^{*}| \geq h + (M - k - 1)\varepsilon,$$

$$D^{+} |x_{i}^{*}| \geq 0.$$

于是 $|y_{j}(t^{*}) - y_{j}^{*}| \leq |x_{i}(t^{*}) - x_{i}^{*}| + \varepsilon, j = 1,2,\cdots,m$,

$$D^{+} |x_{\tilde{i}}(t^{*}) - x_{\tilde{i}}^{*}| \leq -\delta_{i}\varepsilon < 0.$$

矛盾,所以(8)成立.

最后,取 $k = M - 1$, 于是 $\forall \varepsilon > 0, \| \varphi - x^{*} \| < B, \| \varphi - y^{*} \| < B, \exists T > 0$, 当 $\forall t \geq T$时,有

$$\begin{cases} |x_{i}(t) - x_{i}^{*}| < h + \varepsilon, i = 1,2,\cdots,n, \\ |y_{j}(t) - y_{j}^{*}| < h + \varepsilon, j = 1,2,\cdots,m. \end{cases} \tag{14}$$

定理 2 结论成立.

3 结语

本文研究一类具有时滞变系数双向联想记忆神经网络的稳定性问题. 通过构造 Lyapunov 函数,在系统存在平衡点时给出了系统指数稳定的充分条件,在系统不存在平衡点时给出了系统的吸引域.

参考文献

[1]KOSKO B. Adptive bi-directional associative memories[J]. Applied Optics,1987,26(23):4947-4960.

[2]KOSKO B. Bi-directional associative memory[J]. IEEE Transactions on Systems Man & Cybernetics,1988,18(1):49-60.

[3]KOSKO B. Neural networks and fuzzy systems:a dynamical systems approach to machine intelligence[M]. Prentice Hall,1992.

[4]刘汉军,吴海锋,王阳. 基于3 种训练神经网络方法解决异或问题的研究[J]. 云南民族大学学报(自然科学版),2016,25(03):270-274.

[5]CAO J,DONG M. Exponential stability of delayed bi-directional associative memory networks[J]. Applied Mathematics & Computation,2003,135(1):105-112.

[6]周立群,具比例时滞杂交双向联想记忆神经网络的全局指数稳定性[J]. 电子学报,2014,42(1):96-101.

[7]马德印,梁艳春,管仁初,赵笑奢,时小虎,基于模糊理论和双向联想记忆神经网络的变压器老化评价[J],吉林大学学报,2013,43(5):1331-1337.

[8]李建军,杨志春,双向联想记忆神经网络的指数输入-状态稳定性[J]. 重庆师范大学学报,2016,33(4):79-84.

[9]贾秀玲. 一类带有时滞的模糊双向联想记忆神经网络模型周期解的全局指数稳定性[J]. 新乡学院学报,2017,34(6):10-12.

[10]谭亮,钟守铭. 一类具有离散时滞和分布时滞的 BAM 神经网络的全局耗散分析[J]. 四川师范大学学报(自然科学版),2017,40(1):11-17.

[11]牟天伟,饶若峰. 不动点原理在时滞 BAM 神经网络稳定性分析中的一个应用[J]. 西南大学学报(自然科学版),2017,39(6):5-9.

[12]李倩,李东,王娴. 分数阶 BAM 神经网络的全局渐进稳定性[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2017,34(1):21-26.

[13]黄卫华. 基于等价关系的双粒度粗糙集模型[J]. 云南民族大学学报(自然科学版),2017,26(01):41-45.

(责任编辑:张阳,付强,李建忠,罗敏;英文编辑:周序林)