

基于 LMI 的不确定大系统的 BIBO 镇定

李萍

(西南民族大学计算机科学与技术学院, 四川 成都 610041)

摘要:利用多 Lyapunov 函数法和不等式技巧, 讨论了一类连续时间大系统有界输入有界输出 (BIBO) 的镇定. 以线性矩阵不等式 (LMI) 的形式给出系统 BIBO 稳定的充分条件可以用 MATLAB 工具箱进行可行性求解并在此基础上给出了状态反馈控制器的设计方法并将其推广到系统结构中存在不确定扰动项的情形, 运用 Schur 补引理, 得到了闭环大系统鲁棒 BIBO 稳定的判据. 最后通过算例仿真证明了结论的有效性.

关键词:不确定大系统; 有界输入有界输出稳定; 多 Lyapunov 函数法; 线性矩阵不等式

中图分类号: O19; TP13

文献标志码: A

文章编号: 2095-4271(2018)01-0087-10

BIBO stabilization of uncertain large-scale systems via LMI approach

LI Ping

(School of Computer Science and Technology, Southwest Minzu University, Chengdu 610041, P. R. C.)

Abstract: This paper addresses the problem of bounded input-bounded output (BIBO) stabilization of continuous uncertain large-scale systems. The novel BIBO stability criterion is established by the multiple Lyapunov functions, presented in the form of linear matrix inequalities and can be easily solved by LMI Toolbox in Matlab. Based on the criterion, the design schedule of state feedback matrix is proposed. The robust BIBO stabilization for continuous uncertain large-scale systems is then derived. Finally, numerical examples are given to illustrate the effectiveness of the results.

Key words: uncertain large-scale system; bounded input-bounded output stability; multiple Lyapunov function; linear matrix inequality

1 引言

近十多年来, 大系统 (Large-Scale Systems) 在电力、城市交通、社会经济系统、数字通讯等领域的广泛应用, 形成了世界性的热潮. 一般地, 把模型规模庞大复杂、有多个互联的子系统或多个状态变量的系统称为大系统. 稳定性是控制理论研究的基本问题^[1-4]. 因此大系统的稳定性也一直受到众多学者的广泛关注^[9-11]. 同时, 不确定大系统的鲁棒镇定性也因为模型和测量误差地存在、非线性系统的线性化近似逐渐成为该领域的一个焦点^[5-8].

通常, 人们关注的稳定性为 Lyapunov 意义下的稳定性. 为了追踪参考输入信号, 有界输入有界输出 (BIBO) 稳定性也成为控制领域研究的核心问题之一. 如果系统每个有界的输入都导致输出有界, 那么系统就称为是有界输入有界输出稳定的. 但是到现在为止, 有关大系统的 BIBO 稳定性和鲁棒 BIBO 稳定性的结果还较少^[12-15]. 文献[12-13]讨论了如下的时滞大系统:

收稿日期: 2017-11-08

作者简介: 李萍 (1982-), 女, 汉族, 讲师, 博士, 研究方向: 动力系统稳定性. E-mail: liping925@126.com

基金项目: 国家自然科学基金 (61673016); 四川省教育厅创新团队 (15TD0050)

$$\begin{cases} \dot{x}'(t) = \sum_{i=0}^N A_i x(t-h_i) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases}$$

反馈控制律分别为 $u(t) = -\sum_{i=0}^N F_i x(t-h_i)$ 和 $u(t) = r(t) - \sum_{i=0}^N F_i x(t-h_i)$, 其中 F_i 为反馈增益矩阵. 文献[12-13]建立了闭环系统与时滞无关的渐近稳定和 BIBO 稳定的充分条件. 文献[14-15]对于每一个子系统, 应用了稳定的局部状态反馈, 通过构造 Lyapunov 函数, 利用 Bihari 型不等式, 基于 Riccati 方程的正定解和矩阵范数不等式推导出了多变量反馈控制大系统 BIBO 稳定的充分条件.

本文将采用多 Lyapunov 函数方法及常数变易法, 讨论了闭环大系统 BIBO 稳定的性质与鲁棒 BIBO 稳定的性质. 系统的扰动向量相比文献[14-16]更具一般性, 并且 BIBO 稳定性判据和状态反馈矩阵可以用 MATLAB 工具箱进行可行性求解, 从不同于文献[12-16]的角度建立了闭环大系统的 BIBO 稳定的条件.

2 问题的陈述

考虑如下的有 N 个子系统的不确定连续大系统:

$$\begin{cases} \dot{x}'_i(t) = (A_i + \Delta A_i(t))x_i(t) + \sum_{j=1}^N B_i F_{ij} C_j x_j(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u_i(t), \\ y_i(t) = (C_i + \Delta C_i(t))x_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (1)$$

其中 $x_i(t) \in R^{n_i}$, $y_i(t) \in R^{m_i}$, $u_i(t) \in R^{r_i}$ 分别是系统的状态向量、控制输出和控制输入, $\sum_{i=1}^N n_i = n$, $\sum_{i=1}^N r_i = r$, $\sum_{i=1}^N m_i = m$. A_i, B_i, C_i, F_{ij} 是常数矩阵, 具有合适的维数. 时变扰动向量 $\Delta A_i(t), \Delta B_i(t), \Delta C_i(t)$ 在本文满足

$$[\Delta A_i(t) \quad \Delta B_i(t) \quad \Delta C_i(t)] = D_i F_i(t) [E_{i1} \quad E_{i2} \quad E_{i3}], \quad (2)$$

其中 D_i, E_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, N$ 是具有合适维数的常数矩阵, 不确定时变矩阵 $F_i(t)$ 满足

$$F_i^T(t) F_i(t) \leq I, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

注 2.1 F_i, F_{ij} 是记号不同的矩阵.

为了追踪参考输入信号 $r_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, N$, 设控制律为

$$u_i(t) = K_i x_i(t) + r_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

下面给出需要使用的一些定义、引理.

定义 2.1 $\forall x_i(t) \in R^{n_i}$, $\|x_i(t)\| \triangleq \sqrt{x_i^T(t)x_i(t)}$, $\|x_i(t)\|_\infty \triangleq \sup_t \|x_i(t)\|$.

定义 2.2^[16] 若 $\|r\|_\infty = \sup_t \|r(t)\| < +\infty$, 那么记 $r(t) \in L_\infty^n$.

定义 2.3^[16] 如果对任意参考输入信号 $r(t) \in L_\infty^n$, 存在正常数 θ_1, θ_2 , 使得系统(1)满足

$$\|y(t)\| \leq \theta_1 \|r\|_\infty + \theta_2,$$

则称系统(1)有界输入有界输出稳定.

引理 2.1^[17] (Schur 补引理) 对给定的对称矩阵 $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$, 其中 $S_{11} \in R^{m \times m}$, ($m < n$), 则如下叙述等价:

- ① $S \leq 0$;
- ② $S_{11} < 0$, $S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} \leq 0$;
- ③ $S_{22} < 0$, $S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T \leq 0$.

用常数变易法很容易证明下面的引理:

引理 2.2 已知常数 $\zeta > 0$, $\kappa > 0$. 若连续函数 $\omega(t)$ 满足下面的微分不等式,

$$\dot{\omega}(t) \leq -\zeta \omega(t) + \kappa v(t),$$

其中, $v(t)$ 为任意可积函数,那么不等式

$$\omega(t) \leq e^{-\varepsilon t} \omega(0) + \kappa \int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)} v(t-\tau) d\tau.$$

成立.

引理 2.3^[18] $E, H, F(t)$ 是具有适当维数的矩阵,不确定时变矩阵 $F(t)$ 满足 $F^T(t)F(t) \leq I$, 则对任意的常数 $\varepsilon > 0$, 不等式

$$EF(t)H + H^T F^T(t)E^T \leq \frac{1}{\varepsilon} EE^T + \varepsilon H^T H.$$

成立.

3 闭环大系统的分散 BIBO 稳定分析

首先,讨论大系统(1)无扰动参数的情况,即

$$\begin{cases} \dot{x}_i'(t) = A_i x_i(t) + \sum_{j=1}^N B_i F_{ij} C_j x_j(t) + B_i u_i(t), \\ y_i(t) = C_i x_i(t), i = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (4)$$

将(3)式代入(4)式得到

$$\begin{cases} \dot{x}_i'(t) = (A_i + B_i K_i) x_i(t) + \sum_{j=1}^N B_i F_{ij} C_j x_j(t) + B_i r_i(t), \\ y_i(t) = C_i x_i(t), i = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (5)$$

当 $i, j = 1, 2$ 时,闭环大系统(5)的结构如图 1 所示.

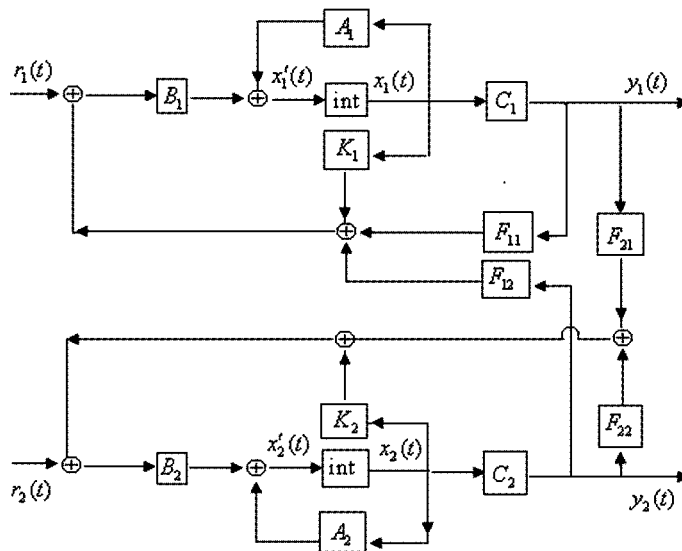


图 1 $i, j = 1, 2$ 时,大系统(5)的反馈控制图

Fig. 1 The feedback control of (5) when $i, j = 1, 2$

定理 3.1 如果存在常数 $\alpha > 0, \beta > 0, \varepsilon > 0$, 存在矩阵 $X_i > 0$, 矩阵 \bar{K}_i 具有适当的维数 ($i = 1, 2, \dots, N$), 使得 LMI

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} \\ * & \Pi_{22} & 0 \\ * & * & \Pi_{33} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (6)$$

成立,其中

$$\begin{aligned} \Pi_{11} &= \text{diag}\{\Phi_{11}, \Phi_{22}, \dots, \Phi_{NN}\}, \Pi_{12} = \text{diag}\{B_1, B_2, \dots, B_N\}, \\ \Pi_{13} &= \text{diag}\{X_1, X_2, \dots, X_N\}, \Pi_{22} = \text{diag}\{-\beta I_1, -\beta I_2, \dots, -\beta I_N\}, \\ \Pi_{33} &= \text{diag}\left\{-\frac{1}{(N-1)\varepsilon}I_1, -\frac{1}{(N-1)\varepsilon}I_2, \dots, -\frac{1}{(N-1)\varepsilon}I_N\right\}, \\ \Phi_{ii} &= A_i X_i + X_i A_i^T + B_i \tilde{K}_i + \tilde{K}_i^T B_i^T + B_i F_{ii}^T C_i X_i + X_i C_i^T F_{ii}^T B_i^T + \alpha X_i + \sum_{j \neq i}^N \varepsilon^{-1} M_{ij} M_{ij}^T, \\ M_{ij} &= B_i F_{ij} C_j, i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

那么闭环大系统(5)是 BIBO 稳定的, 状态反馈矩阵 $K_i = \tilde{K}_i X_i^{-1}$.

证明: 构建多 Lyapunov 函数 $V(t) \triangleq \sum_{i=1}^N x_i^T(t) X_i^{-1} x_i(t) = \sum_{i=1}^N x_i^T(t) P_i x_i(t)$. 沿着大系统(5)的轨线对时间 t 求全导数得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N x_i^T(t) P_i x_i(t) &= \\ &\sum_{i=1}^N (x_i^T(t) (A_i^T P_i + P_i A_i + P_i B_i K_i + K_i^T B_i^T P_i) x_i(t) + 2x_i^T(t) C_i^T F_{ii}^T B_i^T P_i x_i(t) + 2x_i^T(t) P_i B_i r_i(t)) + \\ &2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N x_j^T(t) C_j^T F_{ij}^T B_i^T P_i x_i(t) \leq \\ &\sum_{i=1}^N x_i^T(t) (A_i^T P_i + P_i A_i + P_i B_i K_i + K_i^T B_i^T P_i + C_i^T F_{ii}^T B_i^T P_i + P_i B_i F_{ii}^T C_i + \alpha P_i) x_i(t) + \\ &\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j \neq i}^N (\varepsilon^{-1} x_i^T(t) P_i M_{ij} M_{ij}^T P_i x_i(t) + \varepsilon x_j^T(t) x_j(t)) \right) + \\ &\sum_{i=1}^N (2x_i^T(t) P_i B_i r_i(t) - \alpha x_i^T(t) P_i x_i(t)). \end{aligned}$$

定义

$$x(t) = [x_1^T(t), x_2^T(t), \dots, x_N^T(t)]^T, r(t) = [r_1^T(t), r_2^T(t), \dots, r_N^T(t)]^T, P = \text{diag}\{P_1, P_2, \dots, P_N\},$$

因此, 有

$$V'(t) = \frac{d}{dt} x^T(t) P x(t) = \frac{d}{dt} \|P^{1/2} x(t)\|^2 \leq \varpi^T \Sigma \varpi - \alpha x^T(t) P x(t) + \beta r^T(t) r(t),$$

其中

$$\begin{aligned} \varpi &= \begin{bmatrix} x(t) \\ r(t) \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ * & \Sigma_{22} \end{bmatrix}, \Sigma_{11} = \text{diag}\{\Lambda_{11}, \Lambda_{22}, \dots, \Lambda_{NN}\}, \\ \Sigma_{12} &= \text{diag}\{P_1 B_1, P_2 B_2, \dots, P_N B_N\}, \Sigma_{22} = \text{diag}\{-\beta I_1, -\beta I_2, \dots, -\beta I_N\}, \\ \Lambda_{ii} &= A_i^T P_i + P_i A_i + P_i B_i K_i + K_i^T B_i^T P_i + P_i B_i F_{ii}^T C_i + C_i^T F_{ii}^T B_i^T P_i + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j \neq i}^N P_i M_{ij} M_{ij}^T P_i + \alpha P_i + (N-1)\varepsilon I_i, \\ M_{ij} &= B_i F_{ij} C_j, i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

由引理 2.1, $\Sigma \leq 0$ 成立当且仅当

$$\tilde{\Pi} = \begin{bmatrix} \tilde{\Pi}_{11} & \tilde{\Pi}_{12} & \tilde{\Pi}_{13} \\ * & \tilde{\Pi}_{22} & 0 \\ * & * & \tilde{\Pi}_{33} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (7)$$

成立, 其中

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{11} &= \text{diag}\{\tilde{\Phi}_{11}, \tilde{\Phi}_{22}, \dots, \tilde{\Phi}_{NN}\}, \tilde{\Pi}_{12} = \Sigma_{12}, \tilde{\Pi}_{13} = \text{diag}\{I_1, I_2, \dots, I_N\}, \tilde{\Pi}_{22} = \Sigma_{22}, \\ \tilde{\Pi}_{33} &= \text{diag}\left\{-\frac{1}{(N-1)\varepsilon}I_1, -\frac{1}{(N-1)\varepsilon}I_2, \dots, -\frac{1}{(N-1)\varepsilon}I_N\right\}, \tilde{\Phi}_{ii} = \Lambda_{ii} - (N-1)\varepsilon I_i, \end{aligned}$$

$$M_{ij} = B_i F_{ij} C_j, i = 1, 2, \dots, N.$$

因为 $X_i = P_i^{-1}$, 再令 $\tilde{K}_i = K_i X_i, X = \text{diag}\{X_1, X_2, \dots, X_N\}, I = \text{diag}\{I_1, I_2, \dots, I_N\}$, 那么 $\tilde{\Pi}$ 左乘、右乘 $\text{diag}\{X, I, I\}$, 得到(7)式与(6)式等价.

因为 $\Pi \leq 0$, 有

$$\frac{d}{dt} \|P^{1/2}x(t)\|^2 \leq -\alpha x^T(t)Px(t) + \beta r^T(t)r(t) = -\alpha \|P^{1/2}x(t)\|^2 + \beta \|r(t)\|^2.$$

再由引理 2.2 可以得到 $V(t) = \|P^{1/2}x(t)\|^2$ 的一个上界如下:

$$\|P^{1/2}x(t)\|^2 \leq e^{-\alpha t} \|P^{1/2}x(0)\|^2 + \beta \int_0^t e^{-\alpha s} \|r(t-s)\|^2 ds \leq$$

$$e^{-\alpha t} \|P^{1/2}x(0)\|^2 + \beta \sup_{s \in [0, t]} \|r(t-s)\|^2 \int_0^t e^{-\alpha s} ds \leq$$

$$e^{-\alpha t} \|P^{1/2}x(0)\|^2 + \beta \|r\|_\infty^2 \int_0^t e^{-\alpha s} ds =$$

$$e^{-\alpha t} \|P^{1/2}x(0)\|^2 + \frac{\beta}{\alpha} \|r\|_\infty^2 (1 - e^{-\alpha t}),$$

并且

$$\lambda_{\min}(P) \|x(t)\|^2 \leq V(t) = \|P^{1/2}x(t)\|^2 \leq e^{-\alpha t} \|P^{1/2}x(0)\|^2 + \frac{\beta}{\alpha} \|r\|_\infty^2 (1 - e^{-\alpha t}).$$

由以上不等式, 有

$$\lambda_{\min}(P) \|x(t)\|^2 \leq \|P^{1/2}x(0)\|^2 + \frac{\beta}{\alpha} \|r\|_\infty^2 \leq \lambda_{\max}(P) \|x(0)\|^2 + \frac{\beta}{\alpha} \|r\|_\infty^2.$$

因此, 得到

$$\|x(t)\|^2 \leq \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \|x(0)\|^2 + \frac{\beta}{\alpha \lambda_{\min}(P)} \|r\|_\infty^2 \leq \left(\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \|x(0)\| + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha \lambda_{\min}(P)}} \|r\|_\infty \right)^2,$$

或者

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \|x(0)\| + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha \lambda_{\min}(P)}} \|r\|_\infty.$$

因此, 对 $\forall r(t) \in L_\infty^n$,

$$\|y(t)\| \leq \|C\| \|x(t)\| \leq \|C\| \left(\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \|x(0)\| + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha \lambda_{\min}(P)}} \|r\|_\infty \right) =$$

$$\theta_1 \|r\|_\infty + \theta_2,$$

其中

$$C = \text{diag}\{C_1, C_2, \dots, C_N\}, \theta_1 = \|C\| \sqrt{\frac{\beta}{\alpha \lambda_{\min}(P)}}, \theta_2 = \|C\| \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \|x(0)\|,$$

由定义 2.3, 定理 3.1 成立.

4 闭环大系统的鲁棒分散 BIBO 稳定分析

将(2)、(3)式带入(1)式得到的闭环大系统如下:

$$\begin{cases} x_i'(t) = (A_i + B_i K_i + D_i F_i(t)(E_{i1} + E_{i2} K_i)) x_i(t) + \\ \sum_{j=1}^N B_i F_{ij} C_j x_j(t) + (B_i + D_i F_i(t) E_{i2}) r_i(t), \\ y_i(t) = (C_i + \Delta C_i(t)) x_i(t), i = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (8)$$

定理 4.1 如果存在常数 $\alpha > 0, \beta > 0, \varepsilon > 0, \lambda_i > 0$, 存在矩阵 $X_i > 0$, 矩阵 \tilde{K}_i 具有适当的维数 ($i = 1, 2, \dots, N$), 使得 LMI

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ * & \Theta_{22} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (9)$$

成立, 其中,

$$\Theta_{11} = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} \\ * & \Pi_{22} & 0 \\ * & * & \Pi_{33} \end{bmatrix},$$

$$\Theta_{12} = \begin{bmatrix} D_1 X_1 & 0 & 0 & X_1 E_{11}^T + \tilde{K}_1^T E_{12}^T & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & D_N X_N & 0 & 0 & X_N E_{N1}^T + \tilde{K}_N^T E_{N2}^T \\ 0 & 0 & 0 & E_{12}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{N2}^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Theta_{22} = \text{diag}\{-\lambda_1 I_1, -\lambda_2 I_2, \dots, -\lambda_N I_N, -\lambda_1^{-1} I_1, -\lambda_2^{-1} I_2, \dots, -\lambda_N^{-1} I_N\},$$

$$\Pi_{11} = \text{diag}\{\Phi_{11}, \Phi_{22}, \dots, \Phi_{NN}\}, \Pi_{12} = \text{diag}\{B_1, B_2, \dots, B_N\},$$

$$\Pi_{13} = \text{diag}\{X_1, X_2, \dots, X_N\}, \Pi_{22} = \text{diag}\{-\beta I_1, -\beta I_2, \dots, -\beta I_N\},$$

$$\Pi_{33} = \text{diag}\left\{-\frac{1}{(N-1)\varepsilon} I_1, -\frac{1}{(N-1)\varepsilon} I_2, \dots, -\frac{1}{(N-1)\varepsilon} I_N\right\},$$

那么闭环大系统(8)是鲁棒 BIBO 稳定的, 状态反馈矩阵 $K_i = \tilde{K}_i X_i^{-1}$.

证明: 构建与定理 3.1 相同的多 Lyapunov 函数 $V(t)$. 沿着系统(8)的轨线对 $V(t)$ 函数求全导数有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N x_i^T(t) P_i x_i(t) &= \sum_{i=1}^N (x_i^T(t) (A_i^T P_i + P_i A_i + P_i B_i K_i + K_i^T B_i^T P_i) x_i(t) + 2x_i^T(t) C_i^T F_{ii}^T B_i^T P_i x_i(t)) + \\ &2 \sum_{i=1}^N (x_i^T(t) P_i B_i r_i(t) + x_i^T(t) P_i D_i F_i(t) E_{i2} r_i(t)) + \\ &\sum_{i=1}^N x_i^T(t) ((E_{i1} + E_{i2} K_i)^T F_i^T D_i^T P_i + P_i D_i F_i(t) (E_{i1} + E_{i2} K_i)) x_i(t) + \\ &2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N x_j^T(t) C_j^T F_{ij}^T B_i^T P_i x_i(t). \end{aligned} \quad (10)$$

因为

$$\begin{aligned} &x_i^T(t) ((E_{i1} + E_{i2} K_i)^T F_i^T D_i^T P_i + P_i D_i F_i(t) (E_{i1} + E_{i2} K_i)) x_i(t) + 2x_i^T(t) P_i D_i F_i(t) E_{i2} r_i(t) = \\ &\begin{bmatrix} x_i(t) \\ r_i(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_i D_i \\ 0 \end{bmatrix} F_i(t) [E_{i1} + E_{i2} K_i \quad E_{i2}] \begin{bmatrix} x_i(t) \\ r_i(t) \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} x_i(t) \\ r_i(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (E_{i1} + E_{i2} K_i)^T \\ E_{i2}^T \end{bmatrix} F_i^T(t) [D_i^T P_i \quad 0] \begin{bmatrix} x_i(t) \\ r_i(t) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

由引理 2.3, 存在常数 $\lambda_i > 0$, 使得

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} P_i D_i \\ 0 \end{bmatrix} F_i(t) \begin{bmatrix} E_{i1} + E_{i2} K_i & E_{i2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (E_{i1} + E_{i2} K_i)^T \\ E_{i2}^T \end{bmatrix} F_i^T(t) \begin{bmatrix} D_i^T P_i & 0 \end{bmatrix} \leq \\ & \lambda_i^{-1} \begin{bmatrix} P_i D_i \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{i1} + E_{i2} K_i & E_{i2} \end{bmatrix} + \lambda_i \begin{bmatrix} (E_{i1} + E_{i2} K_i)^T \\ E_{i2}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_i^T P_i & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

由(10)和(11),我们可以得到

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N x_i^T(t) P_i x_i(t) \leq \omega^T(t) \Theta \omega(t) - \alpha x^T(t) P x(t) + \beta r^T(t) r(t),$$

其中, ω 与定理 3.1 中定义一致,

$$\begin{aligned} \Theta &= \Sigma + \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} P_i D_i \\ 0 \end{bmatrix} F_i(t) \begin{bmatrix} E_{i1} + E_{i2} K_i & E_{i2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (E_{i1} + E_{i2} K_i)^T \\ E_{i2}^T \end{bmatrix} F_i^T(t) \begin{bmatrix} D_i^T P_i & 0 \end{bmatrix} \leq \\ & \Sigma + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i} \begin{bmatrix} P_i D_i \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{i1} + E_{i2} K_i & E_{i2} \end{bmatrix} + \lambda_i \begin{bmatrix} (E_{i1} + E_{i2} K_i)^T \\ E_{i2}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_i^T P_i & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

参考定理 3.1 的证明可知,(9)式满足时,定理 4.1 成立.

注 4.1 当参考输入信号恒为零,定理 3.1 和定理 4.1 下,大系统分别是渐近稳定和鲁棒渐近稳定的.第五部分的仿真图形可以看到当 $r_i(t) = 0$ 时,系统状态收敛于零.

注 4.2 文献[14-16]的反馈增益矩阵是某个 Riccati 方程的正定解.而本文是通过常数变易法和矩阵分析技巧,得到基于 LMI 的状态反馈控制器的设计方法. LMI 判据通过引入自由矩阵可以降低条件的保守性,因此具有一定的优越性.

注 4.3 参考文献[19]给出了系统参数 $\alpha > 0, \beta > 0$ 的最小化问题,可以表示为:

$$\min \frac{\beta}{\alpha \lambda_{\min}(P)}, \text{ s. t. } \alpha > 0, \beta > 0, P > 0 \text{ 以及(6)式或(9)式成立.}$$

设计过程及求解参考文献[19]定理 1.

5 算例仿真

例 5.1 当 $i, j = 1, 2$ 时,考虑具有如下参数的大系统(4):

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -0.4 & 1 \\ 0.1 & -4 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ -0.5 & -0.1 \end{bmatrix}, F_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, F_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} -0.4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, F_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, F_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

取 $\alpha = 18, \beta = 0.6, \varepsilon = 0.0395$, 由 LMI 工具箱可求得(6)的可行解如下:

$$\begin{aligned} X_1 &= \begin{bmatrix} 9.1520 & 0 \\ 0 & 9.0185 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 8.9811 & 0 \\ 0 & 9.0185 \end{bmatrix}, \\ \tilde{K}_1 &= \begin{bmatrix} 49.0718 & 12.0936 \\ 6.0506 & 62.1607 \end{bmatrix}, \tilde{K}_2 = \begin{bmatrix} 207.0456 & 5.9352 \\ 12.5381 & 76.9884 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

从而可得增益矩阵

$$K_1 = \begin{bmatrix} 5.3618 & 1.3410 \\ 0.6611 & 6.8926 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 23.0535 & 0.6581 \\ 1.3961 & 8.5367 \end{bmatrix}.$$

而 $\theta_1 = 0.6179, \theta_2 = 1.1291 \|x(0)\|$. 图 2(a)、3(a)、4(a)分别表示参考输入信号 $r(t) = 0$ 时的系统状态、控制输入和控制输出;图 2(b)、3(b)、4(b)分别表示参考输入信号 $r(t) = 1$ 时的系统状态、控制输入和控制输出.

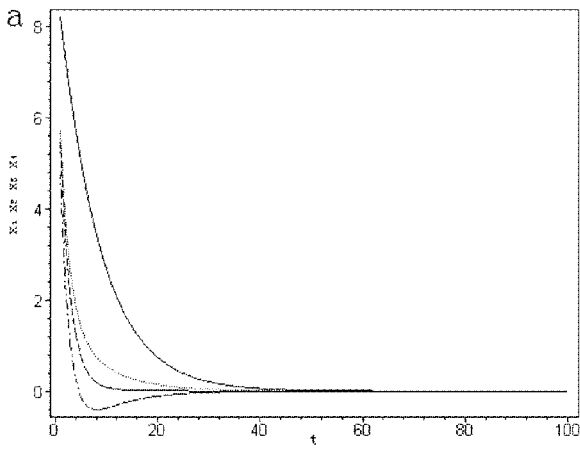


图 2(a) $r(t) = 0$ 时的系统状态

Fig. 2(a) The state of e. g. 5. 1 when $r(t) = 0$

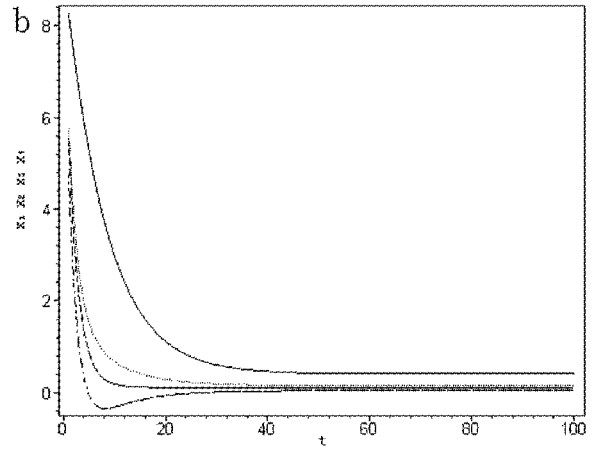


图 2(b) $r(t) = 1$ 时的系统状态

Fig. 2(b) The state of e. g. 5. 1 when $r(t) = 1$

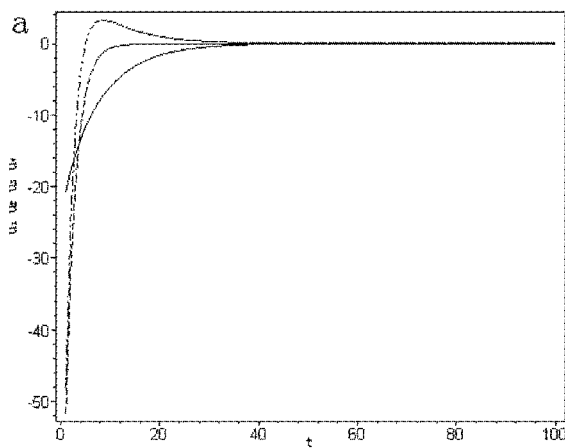


图 3(a) $r(t) = 0$ 时的控制输入

Fig. 3(a) The input of e. g. 5. 1 when $r(t) = 0$

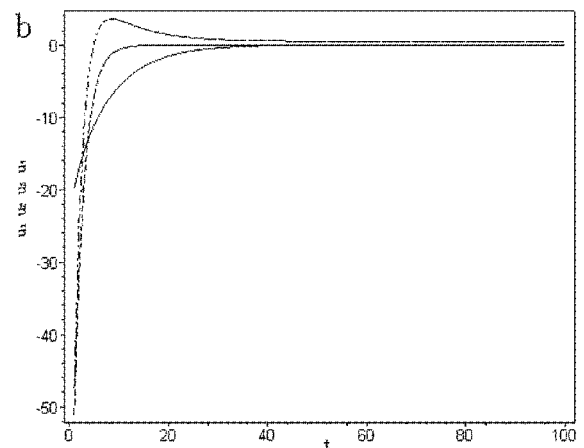


图 3(b) $r(t) = 1$ 时的控制输入

Fig. 3(b) The input of e. g. 5. 1 when $r(t) = 1$

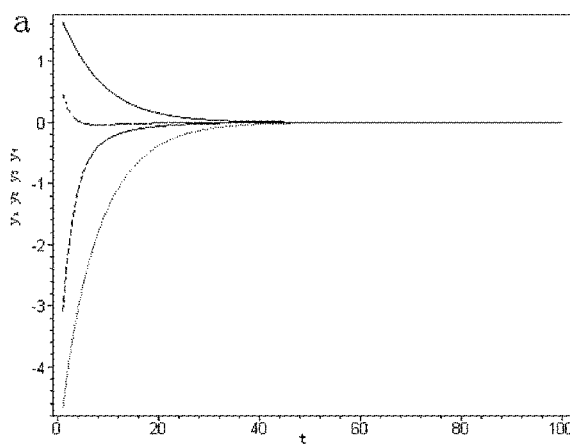


图 4(a) $r(t) = 0$ 时的控制输出

Fig. 4(a) The output of e. g. 5. 1 when $r(t) = 0$

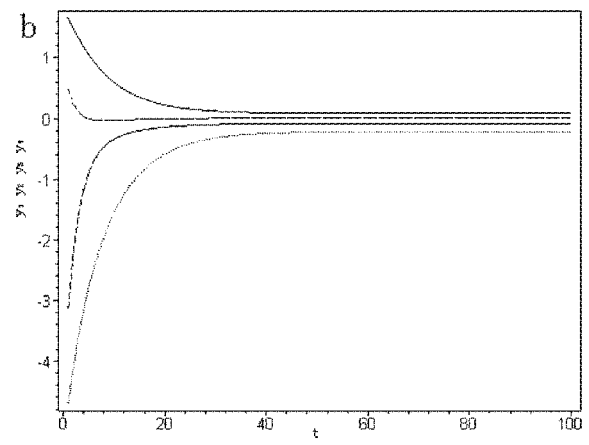


图 4(b) $r(t) = 1$ 时的控制输出

Fig. 4(b) The output of e. g. 5. 1 when $r(t) = 1$

例 5.2 考虑 $i, j = 1, 2$, 大系统(8)具有下面的参数:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, F_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, F_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, F_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$D_i = I, E_{mn} = 0.01I, m = 1, 2, n = 1, 2, 3.$$

取 $\alpha = 2, \beta = 0.1, \lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 0.2, \varepsilon = 0.0025$, 可得线性矩阵不等式(9)的可行解如下:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 10.1022 & -0.0436 \\ -0.0436 & 9.8074 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 8.4955 & 0.0004 \\ 0.0004 & 0.1836 \end{bmatrix},$$

$$\bar{K}_1 = \begin{bmatrix} 170.3403 & 282.1393 \\ -27.0227 & 296.3234 \end{bmatrix}, \bar{K}_2 = \begin{bmatrix} 338.3030 & -0.0898 \\ 0.3267 & -0.1016 \end{bmatrix},$$

那么相应的增益矩阵为

$$K_1 = \begin{bmatrix} 16.9863 & 28.8435 \\ -2.5445 & 30.2029 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 39.8214 & -0.5839 \\ -0.0385 & -0.5537 \end{bmatrix},$$

而 $\theta_1 = 1.5970, \theta_2 = 16.6694 \|x(0)\|$. 图 5(a)、6(a)、7(a) 分别表示参考输入信号 $r(t) = 0$ 时的系统状态、控制输入和控制输出; 图 5(b)、6(b)、7(b) 分别表示参考输入信号 $r(t) = \sin t$ 时的系统状态、控制输入、控制输出.

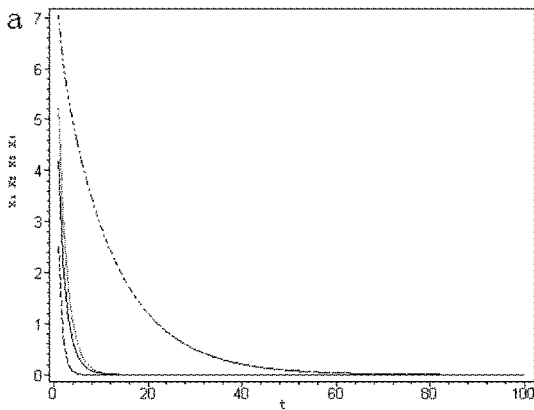


图 5(a) $r(t) = 0$ 时的系统状态

Fig. 5(a) The state of e. g. 5.2 when $r(t) = 0$

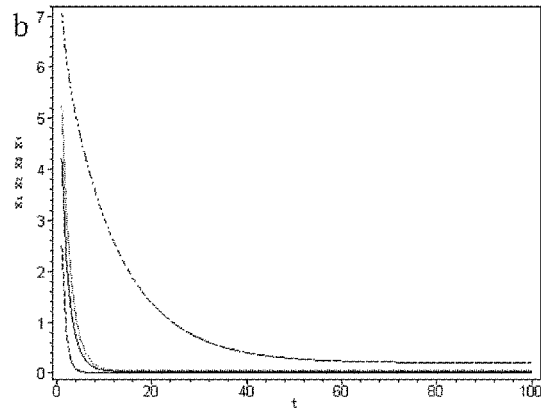


图 5(b) $r(t) = \sin t$ 时的系统状态

Fig. 5(b) The state of e. g. 5.2 when $r(t) = \sin t$

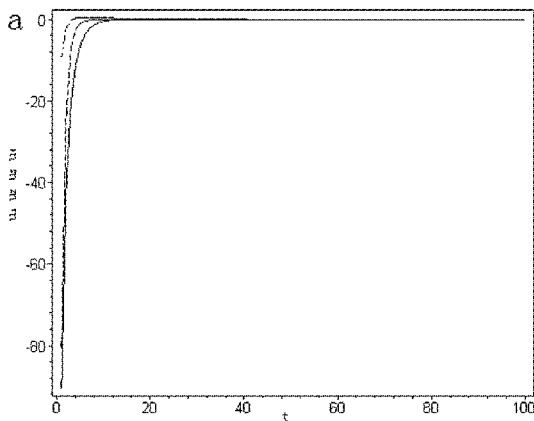


图 6(a) $r(t) = 0$ 时的控制输入

Fig. 6(a) The input of e. g. 5.2 when $r(t) = 0$

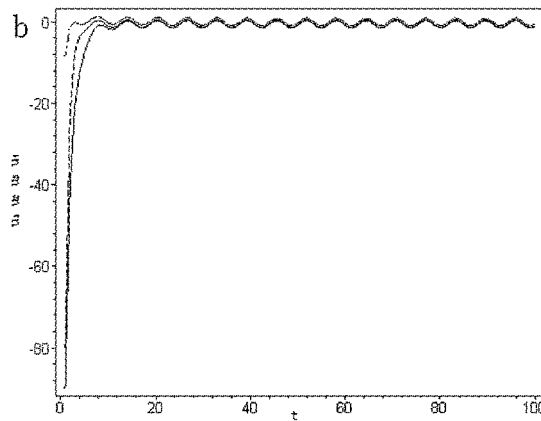
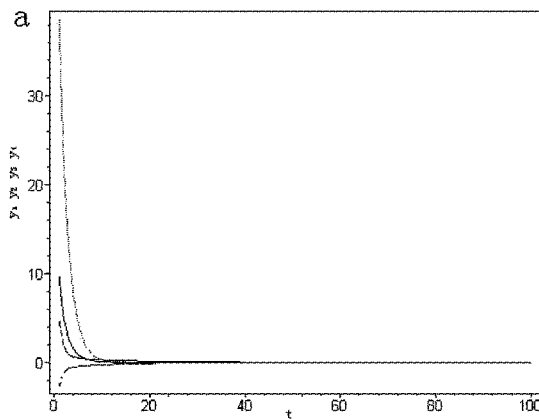
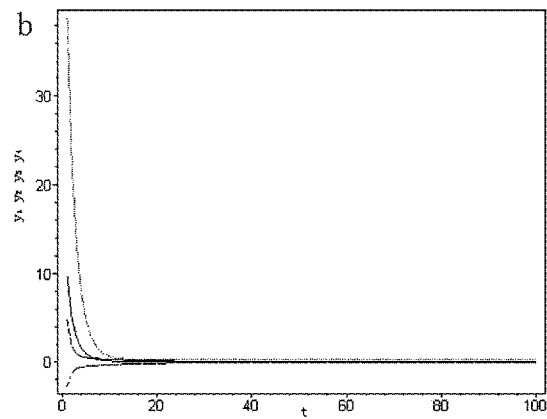


图 6(b) $r(t) = \sin t$ 时的控制输入

Fig. 6(b) The input of e. g. 5.2 when $r(t) = \sin t$

图7(a) $r(t) = 0$ 时的控制输出Fig. 7(a) The output of e. g. 5.2 when $r(t) = 0$ 图7(b) $r(t) = \sin t$ 时的控制输出Fig. 7(b) The output of e. g. 5.2 when $r(t) = \sin t$

6 结束语

本文讨论了一类连续时间闭环大系统 BIBO 稳定性和鲁棒 BIBO 稳定性问题,并给出了反馈控制器的设计方法.将本文的技巧与算法推广到时滞大系统的 BIBO 稳定性理论是作者下一步的工作.

参考文献

- [1] 刘兴文. 离散时间 p -周期正系统的稳定性分析[J]. 西南民族大学学报(自然科学版), 2011, 37(3): 342-347.
- [2] 刘兴文. 时滞切换正系统的切换齐次协正 Lyapunov 函数方法(英文)[J]. 西南民族大学学报(自然科学版), 2014, 40(4): 592-597.
- [3] 刘教, 连捷, 庄严. 一类具有输入时滞的切换系统的正性镇定[J]. 控制与决策, 2017, 32(6): 1001-1006.
- [4] FIACCHINI M, GIRARD A, JUNGERS M. On the stabilizability of discrete-time switched linear systems; novel conditions and comparisons[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 61(5): 1181-1193.
- [5] 沃松林, 赵俊杰, 李博. 不确定广义大系统有限时间鲁棒分散控制[J]. 控制与决策, 2017, 32(8): 1493-1498.
- [6] 赵金辉. 不确定广义大系统的分散保性能控制[J]. 曲阜师范大学学报(自然科学版), 2012, 38(2): 58-63.
- [7] 夏晓南, 张天平. 具有动态不确定性互联大系统的分散自适应控制[J]. 控制理论与应用, 2015, 32(3): 347-356.
- [8] WU H S. Decentralized adaptive robust control of uncertain large scale systems including time-varying state delays in the nonlinear interconnections[J]. IFAC Proceedings Volumes, 2011, 44(1): 2680-2685.
- [9] 傅勤. 基于 LMI 的大型互联线性系统的分散有限时间镇定[J]. 控制与决策, 2010, 25(5): 763-768.
- [10] WO S L, ZOU Y, XU S Y. Decentralized H-infinity state feedback control for discrete-time singular large-scale systems[J]. Journal of Control Theory and Applications, 2010, 8(2): 200-204.
- [11] XIE C H, YANG G H. Decentralized adaptive fault-tolerant control for large-scale systems with external disturbances and actuator faults[J]. Automatica, 2017, 85: 83-90.
- [12] 黎明. 一类多重时滞大系统的稳定性[J]. 曲靖师范学院学报, 1994, 13(2): 4-11.
- [13] 黎明. 具有多重时滞反馈系统的稳定化[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 1994, 17(5): 41-46.
- [14] XU D Y, ZHONG S M, LI M. BIBO stabilization of large-scale systems[J]. Control Theory and Applications, 1995, 12(6): 758-763.
- [15] 徐道义, 钟守铭. 多变量反馈系统的 BIBO 稳定化[J]. 电子科技大学学报, 1995, 24(1): 90-96.
- [16] WU H, MIZUKAMI K. Robust stabilization of uncertain linear dynamical systems[J]. International Journal of Systems Science, 1993, 24(2): 265-276.
- [17] BOYD B, GHAOUI L E, FERON E, BALAKRISHNAN V. Linear matrix inequalities in systems and control theory[M]. Philadelphia: SIAM, 1994.
- [18] LI X, SOUZA C E D. Delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain linear delay systems; a linear matrix inequality approach[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1997, 42(8): 1144-1148.
- [19] TSENG C S, HWANG C K. Fuzzy observer-based fuzzy control design for nonlinear systems with persistent bounded disturbances[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2007, 158(2): 164-179.

(责任编辑:张阳,付强,李建忠,罗敏;英文编辑:周序林)